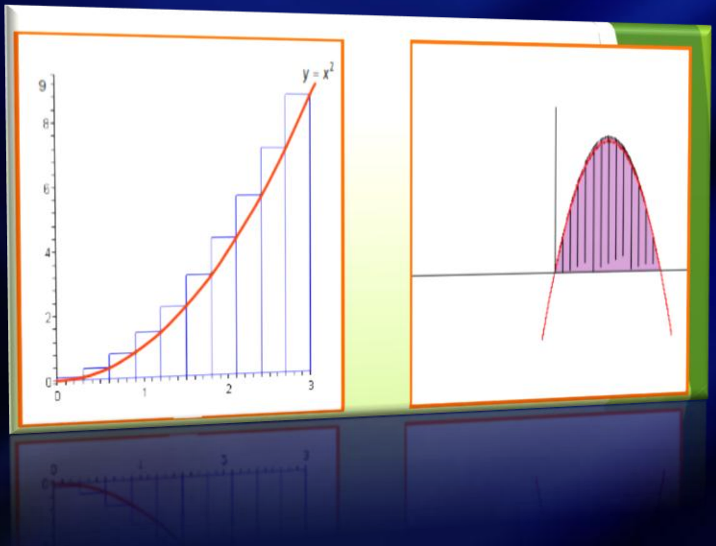
MATEMATIKA - 2
PERTEMUAN 11-12

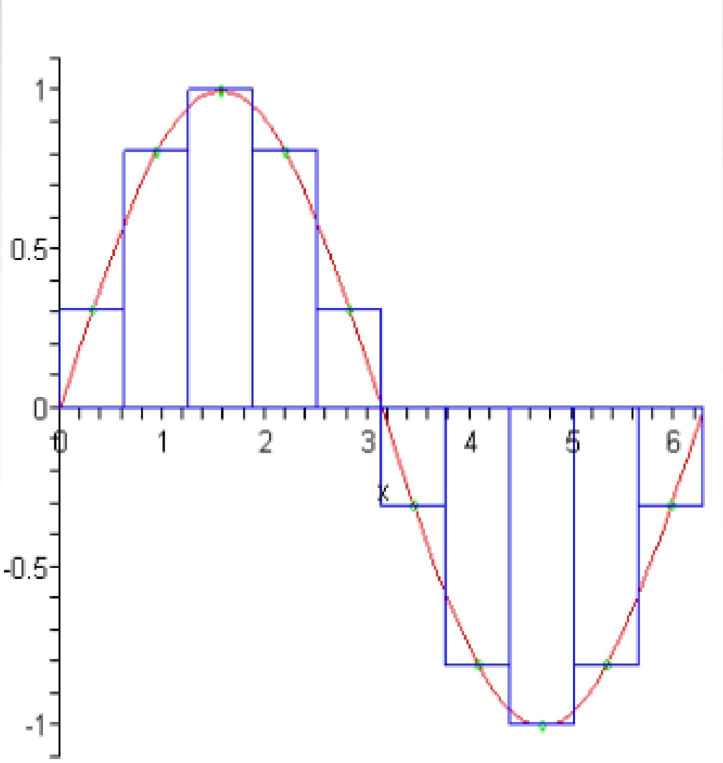
PENERAPAN INTEGRAL
LUAS DAERAH

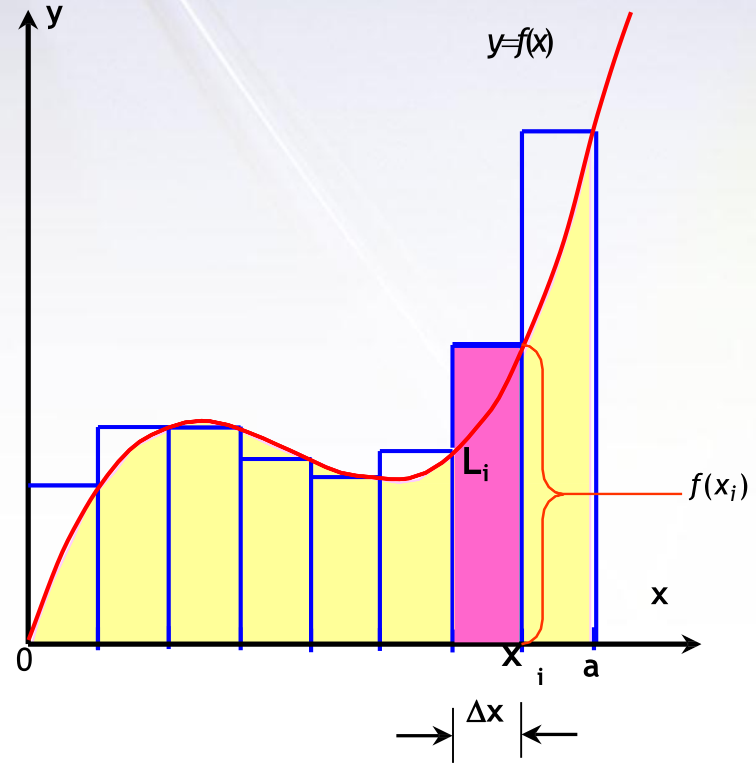


Sarjono Puro, MT

Dalam menentukan Luas Daerah dan Volume Benda Putar, disarankan untuk menggambar grafiknya terlebih dulu.
Dengan menggambar grafiknya maka Daerah yang diminta akan lebih jelas tampak.

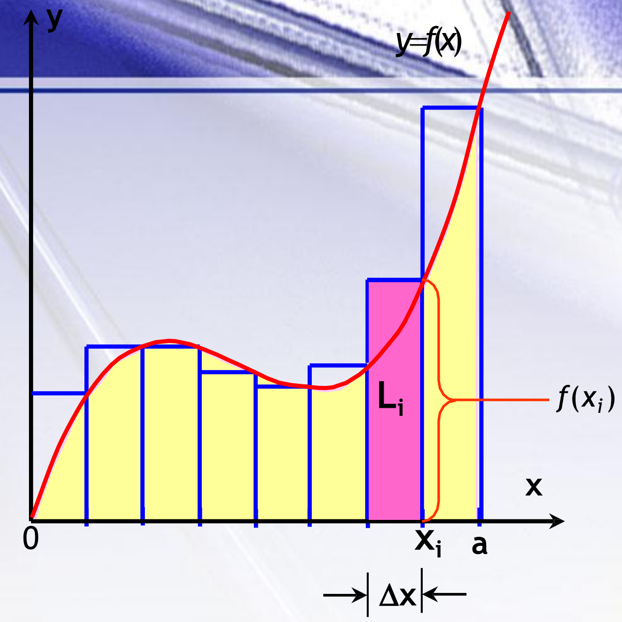
Menentukan luas daerah dengan *limit jumlah dapat diilustrasikan* oleh gambar di samping. Langkah utama yang dilakukan adalah *memartisi*, *mengaproksimasi*, *menjumlahkan*, *dan menghitung limitnya*.





Langkah menghitung luas daerah (lanjutan) :

5. Tentukan luas persegi panjang ke-i (L_i)
6. Jumlahkan luas semua persegi panjang
7. Hitung nilai limit jumlahnya



Luas sebuah persegi panjang: $L_i = f(x_i)\ \Delta x$

Jumlah luas persegi panjang : $L \approx \Sigma\ f(x_i)\ \Delta x$

Limit jumlah : $L = \lim \Sigma\ f(x_i)\ \Delta x \quad (n \to \infty)$

Contoh 1:

Tentukan luas daerah yag dibatasi oleh kurva $y = x^2$, sumbu X, dan garis $x = 3$ dengan menggunakan cara limit jumlah.

Jawab

Langkah penyelesaian:

1. Bagilah interval [0, 3] menjadi n buah selang yang sama panjang; yaitu 3/n.
2. Partisi daerah tersebut menurut persegi panjang luar.
3. Tentukan ukuran persegi panjang pada interval $[x_i , x_{i+1}]$ dan hitunglah luasnya.

$x_0 = 0$

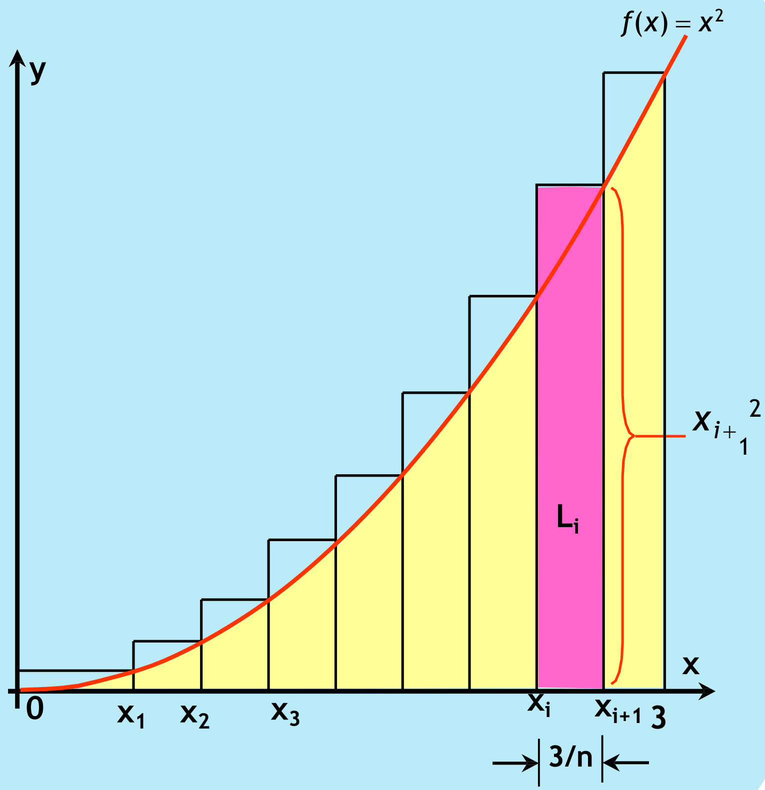
$x_1 = 3/n$

$x_2 = (3/n) \times 2 = 6/n$

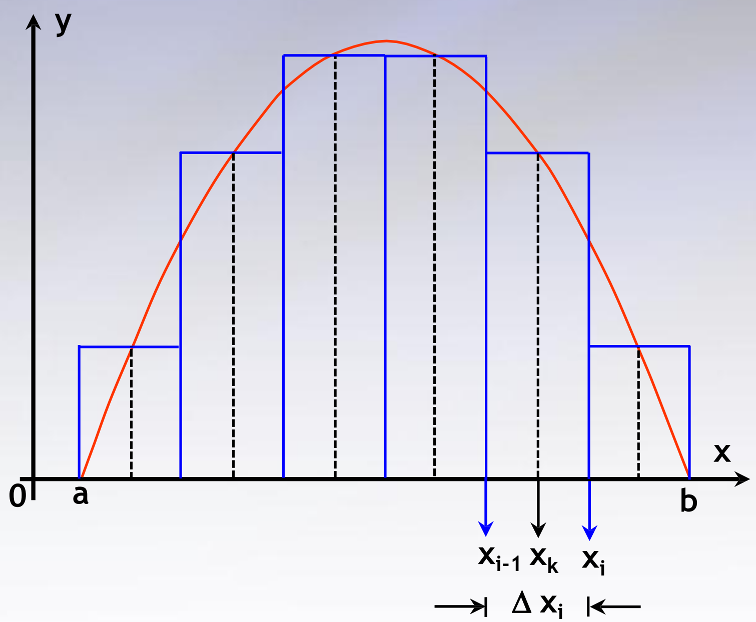
Jadi $x_i = 3i/n$ dan $x_{i+1} = 3(i+1)/n$

$$L_i = x_{i+1}^2 \times \frac{3}{n} = \left(\frac{3(i+1)}{n}\right)^2 \times \frac{3}{n}$$

$$L_i = \frac{27}{n^3}(i+1)^2$$



Perhatikan gambar di bawah ini!



Misalkan selang [a, b] dibagi menjadi n bagian (lebar tidak harus sama) dengan lebar selang ke-i adalah $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Pada selang $[x_{i-1}, x_i]$ diambil titik sampel x_k maka jumlah Riemann dituliskan sebagai :

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x_k$$

Selanjutnya didefinisikan bahwa:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x_k$$

Bentuk $\int_a^b f(x)\,dx$ disebut dengan integral tertentu (Integral Riemann)

Teorema Dasar Kalkulus

Misalkan f adalah fungsi yang kontinyu pada selang [a, b] dan misalkan F adalah anti turunan dari f pada selang tersebut, maka berlaku : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Untuk meringkas penulisan, F(b) - F(a) dinotasikan sebagai $\left[F(x)\right]_a^b$

Contoh 2.

Hitunglah nilai dari $\int_{-1}^{2} \left(6x^2 - 4x\right) dx$

Jawab

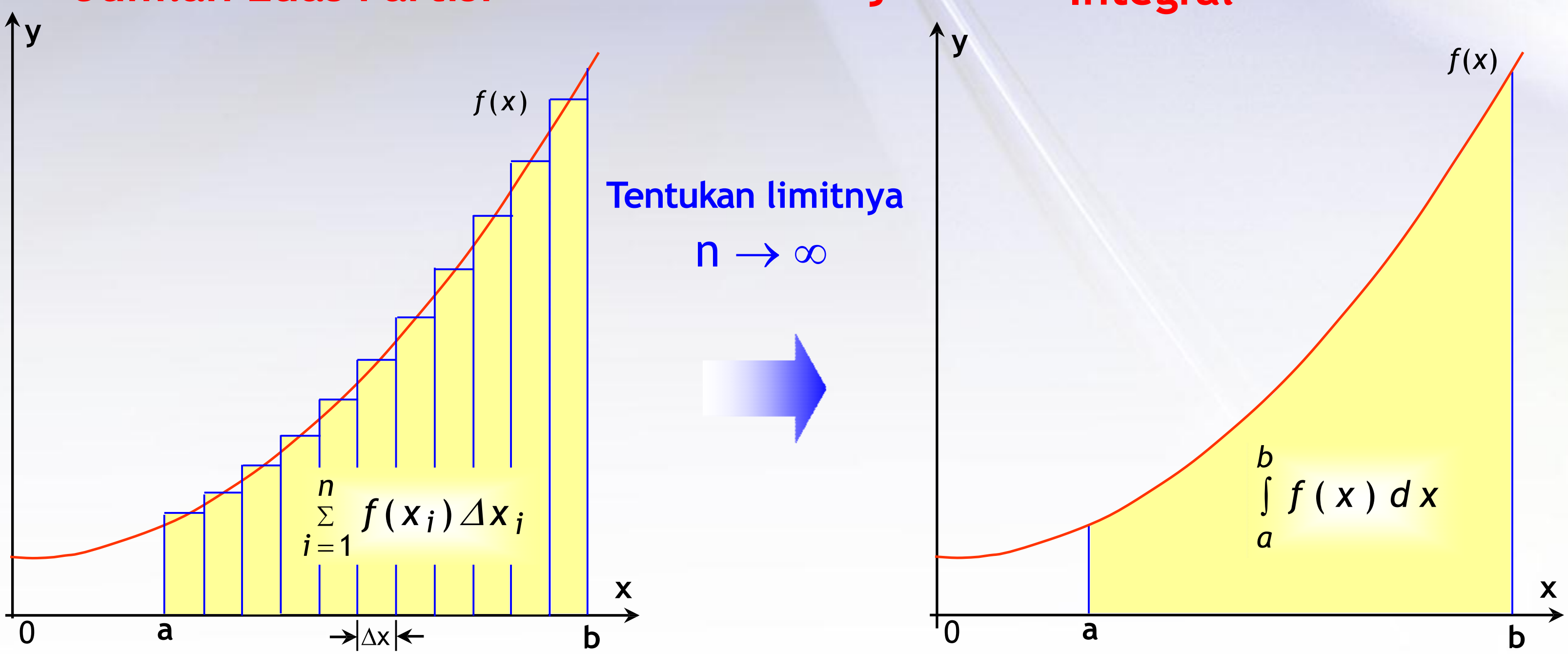
$$\int_{-1}^{2} \left(6x^2 - 4x\right) dx = \left[2x^3 - 2x^2\right]_{-1}^{2}$$

$$= 2(2)^3 - 2(2)^2 - [2(-1)^3 - 2(-1)^2]$$

$$= 16 - 8 + 2 - 2 = 8$$

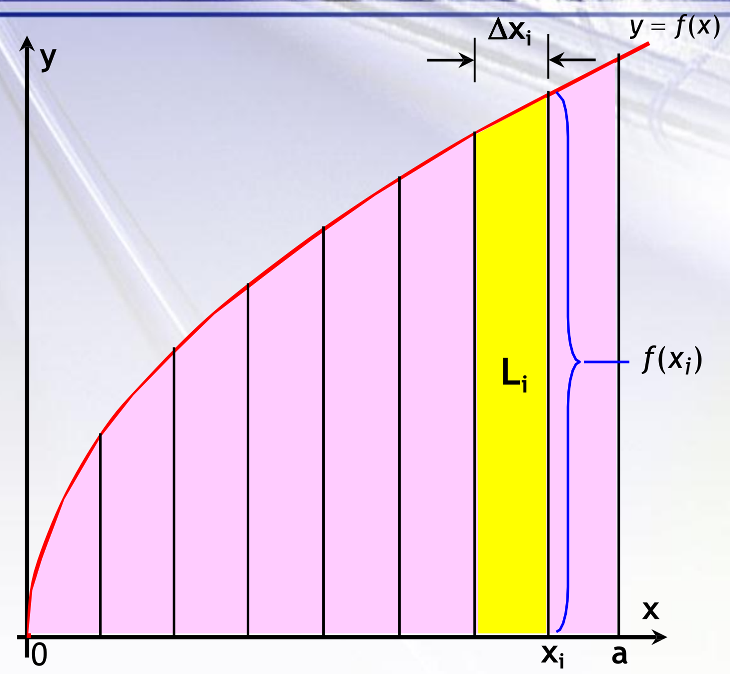
Secara geometri definisi integral Riemaan di atas dapat diartikan sebagai luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$ pada interval [a, b].

Jumlah Luas Partisi **Berubah Menjadi** **Integral**



$$L = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$$

Kegiatan pokok dalam menghitung luas daerah dengan integral tentu adalah:



1. Gambar daerahnya.
2. Partisi daerahnya
3. Aproksimasi luas sebuah partisi

   $L_i \approx f(x_i)\,\Delta x_i$

4. Jumlahkan luas partisi

   $L \approx \sum f(x_i)\,\Delta x_i$

5. Ambil limitnya $L = \lim \sum f(x_i)\,\Delta x_i$
6. Nyatakan dalam integral $L = \int_0^a f(x)\,dx$

Contoh 3.

Hitunglah luas daerah tertutup yang dibatasi kurva $y = x^2$, sumbu x, dan garis x = 3

Jawab

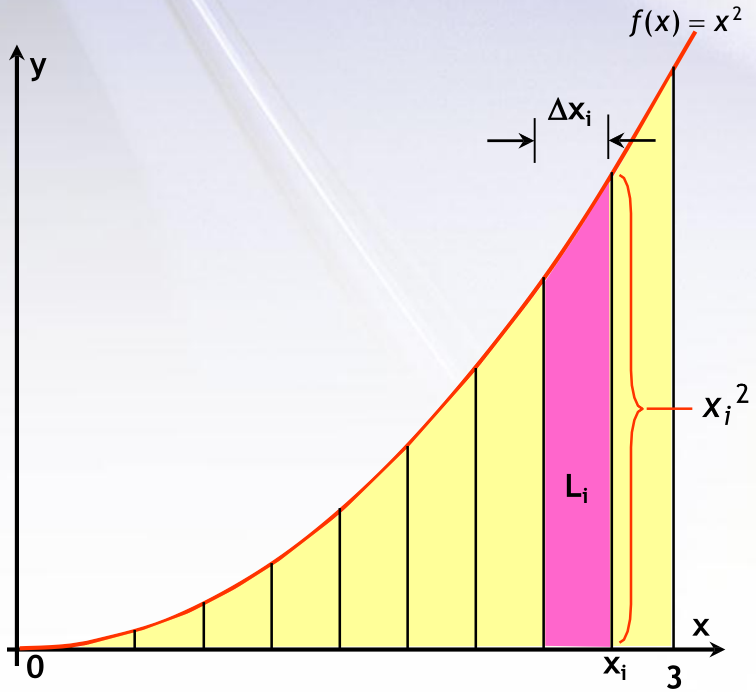
Langkah penyelesaian :

1. Gambarlah daerahnya
2. Partisi daerahnya
3. Aproksimasi luasnya $L_i \approx x_i^2 \, \Delta x_i$
4. Jumlahkan luasnya $L \approx \sum x_i^2 \, \Delta x_i$
5. Ambil limit jumlah luasnya

   $L = \lim \sum x_i^2 \, \Delta x_i$

6. Nyatakan dalam integral dan hitung nilainya $L = \int_0^3 x^2 \, dx$

$$L = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{3^3}{3} - 0 = 9$$



Contoh 4.

Hitunglah luas daerah tertutup yang dibatasi kurva $y = 4x - x^2$, sumbu x, dan garis $x = 5$

Jawab

Langkah penyelesaian:

1. Gambar dan Partisi daerahnya
2. Aproksimasi : $L_i \approx (4x_i - x_i^2)\Delta x_i$ dan

   $A_j \approx -(4x_j - x_j^2)\Delta x_j$

4. Jumlahkan : $L \approx \sum(4x_i - x_i^2)\Delta x_i$ dan

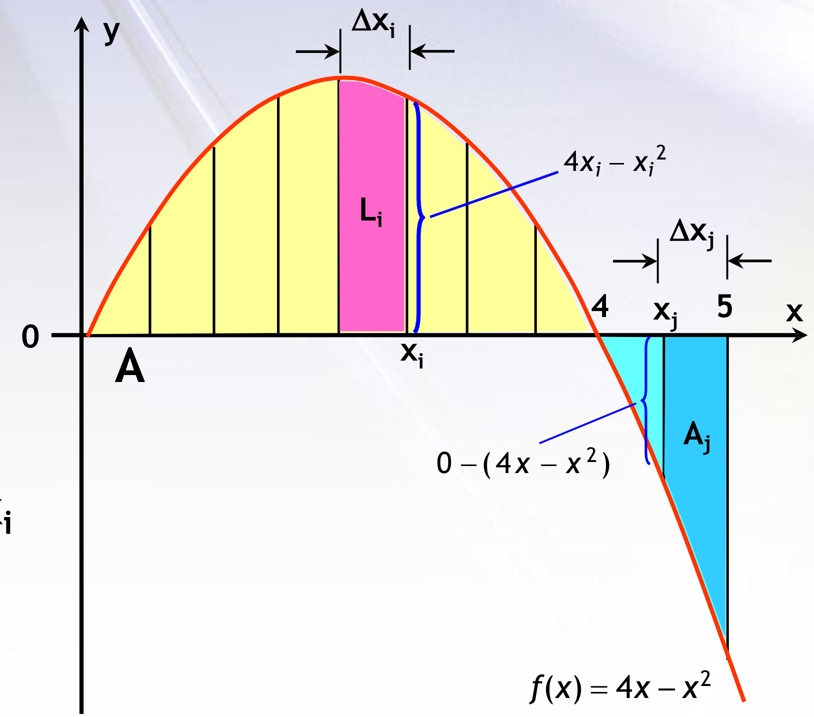
   $\approx \sum -(4x_j - x_j^2)\Delta x_j$

5. Ambil limitnya $L = \lim \sum (4x_i - x_i^2)\Delta x_i$

   dan $A = \lim \sum -(4x_j - x_j^2)\Delta x_j$

6. Nyatakan dalam integral

$$L = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx \qquad A = \int_4^5 -(4x - x^2)\,dx$$



$$L = \int_0^4 (4x - x^2)\, dx$$

$$L = \left[2x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^4$$

$$L = 2(4)^2 - \tfrac{1}{3}(4)^3 - 0 = 32 - \tfrac{64}{3}$$

$$A = \int_4^5 -(4x - x^2)\, dx$$

$$A = \left[-2x^2 + \tfrac{1}{3}x^3\right]_4^5$$

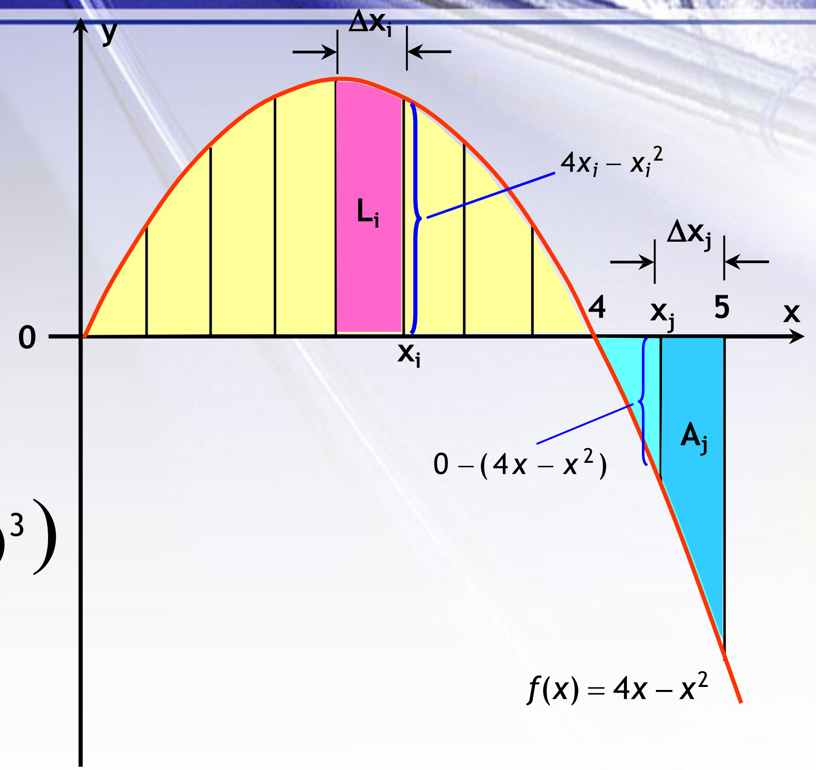
$$A = -2(5)^2 + \tfrac{1}{3}(5)^3 - \left(-2(4)^2 + \tfrac{1}{3}(4)^3\right)$$

$$A = -50 + \frac{125}{3} + 32 - \frac{64}{3}$$

$$A = \tfrac{61}{3} - 18$$

$$\text{Luasdaerah} = 32 - \frac{64}{3} + \frac{61}{3} - 18$$

$$\text{Luas daerah} = 13$$



Menggambar Grafik

Fungsi linear: $y = mx + c$

Cari titik potong pada sumbu x dan y.

Fungsi kuadrat: $y = ax^2 + bx + c$

Cari titik potong pada sumbu x dan y

Cari sumbu simetri: $x_s = -b/2a$

Fungsi kubik:

Turunan pertama = 0

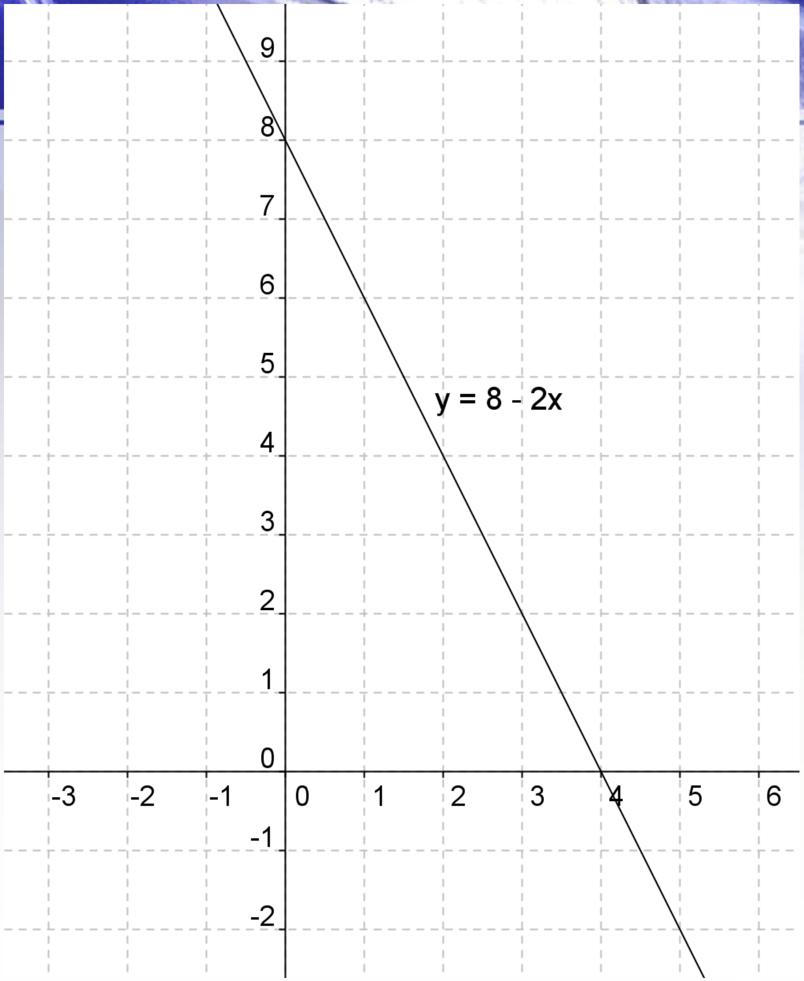
Cek tanda + – + –

Sketsa grafiknya

Fungsi linear: $y = mx + c$
Cari titik potong pd sb. x & y

Contoh:

gambarkan $y = 8 - 2x$



Buat hubungan x & y :

x	y
0	8
4	0

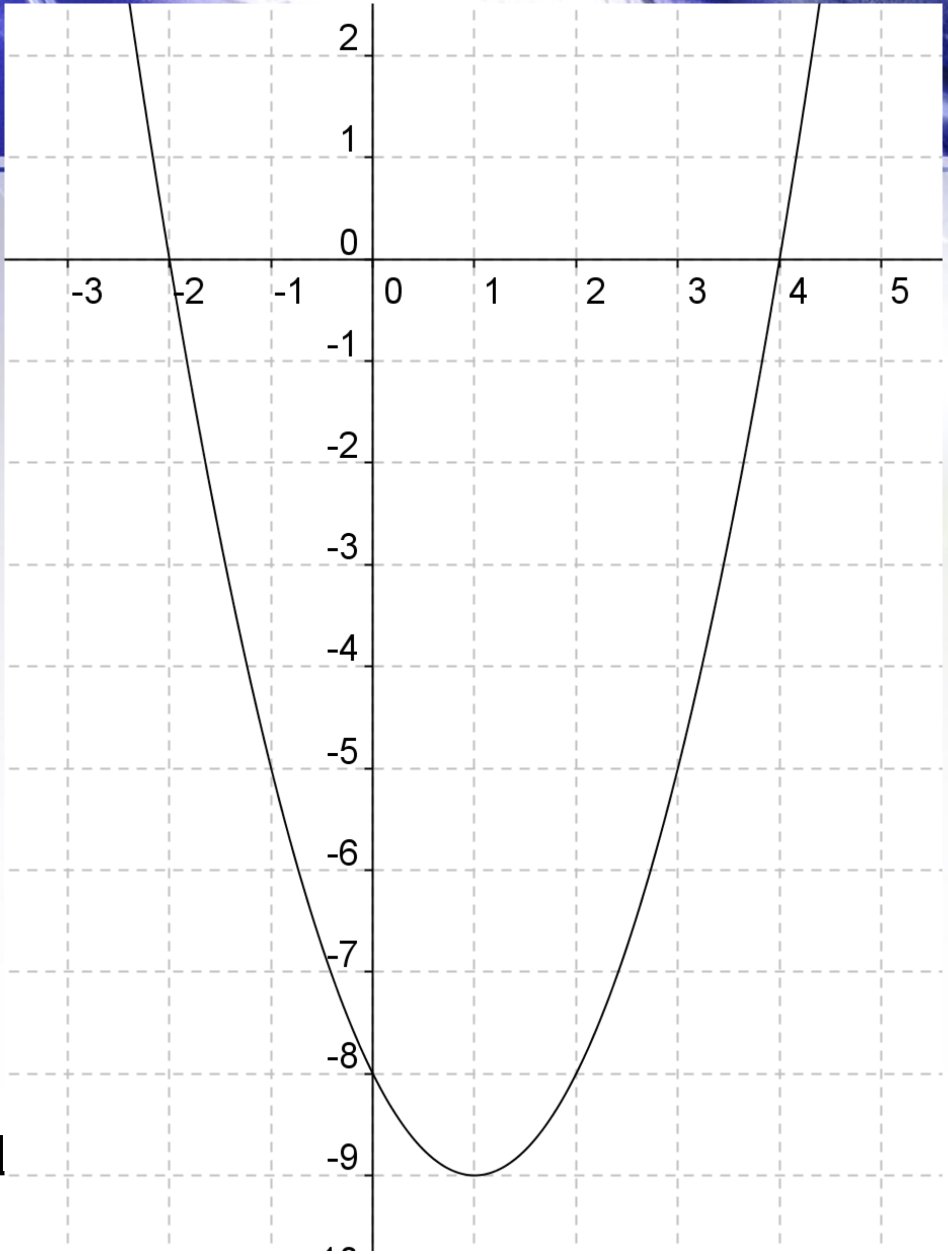
Fungsi kuadrat: $y = ax^2 + bx + c$

- Cari titik potong pd sumbu x & y
- Cari sumbu simetri: $x_s = -b/2a$

Contoh:

Gambarkan $y = x^2 - 2x - 8$

x	y
0	–8
–2	0
4	0



Sb. simetri: $x_s = -(-2) / 2 . 1 = 1$

Menentukan fungsi dari grafik

Fungsi linear/garis lurus:

a) **Jika diketahui titik potong dgn sumbu**
"angka di sb. x kali dgn y dan angka di sb. y kali dgn x"

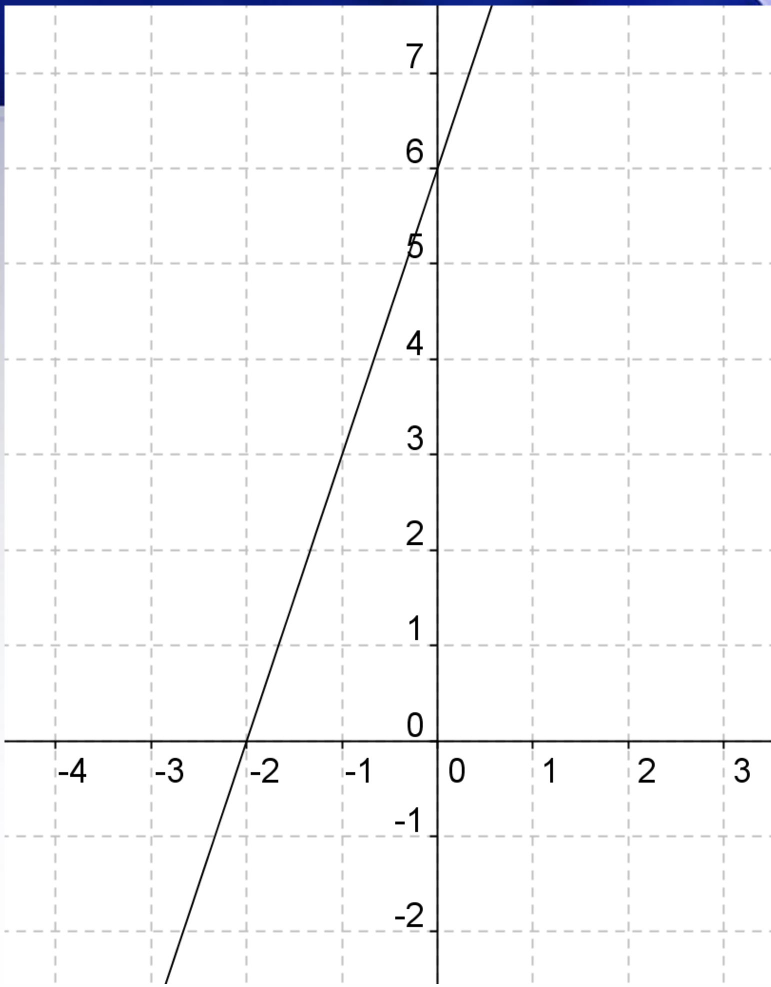
b) **Diketahui 2 titik sembarang**
Cari gradien: $m = \triangle y \,/\, \triangle x$
Pakai rumus: $y - y_1 = m(x - x_1)$ **atau** $y = mx + c$

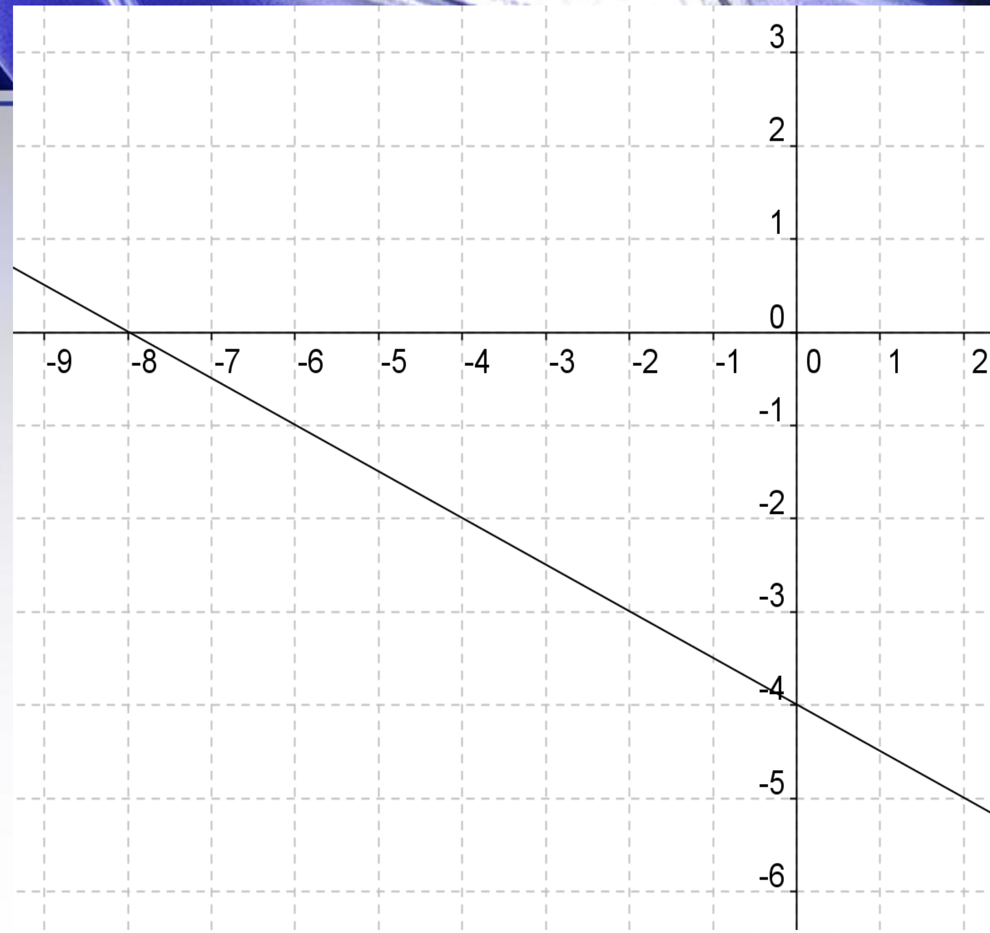
Fungsi kuadrat: $y = ax^2 + bx + c$

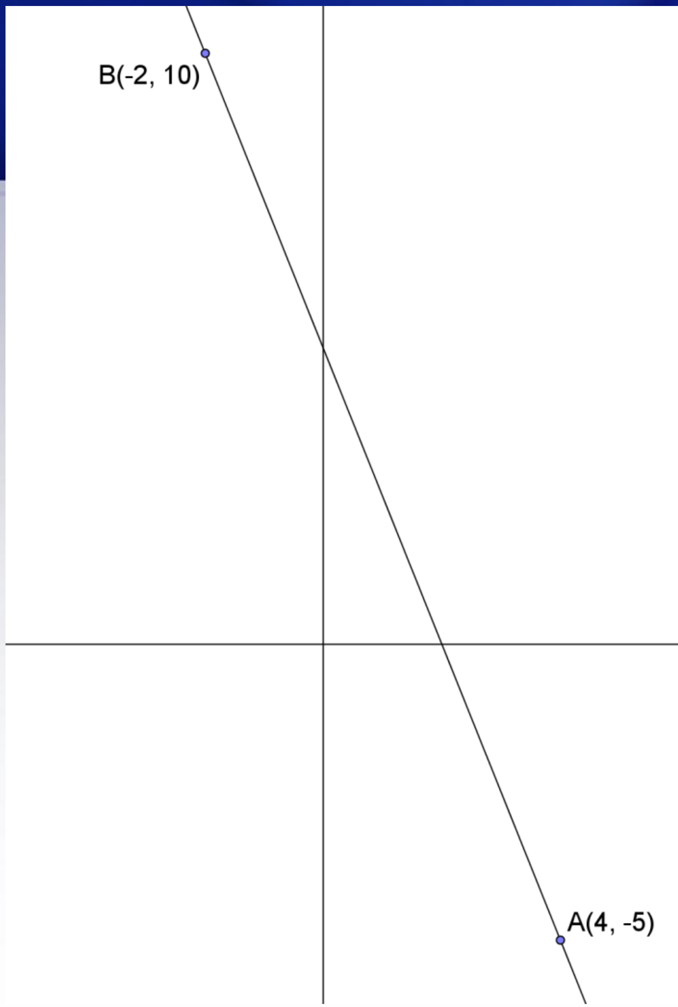
a) **Diketahui Puncak dan 1 titik sembarang**
Pakai: $y - y_P = a\,(x - x_P)^2$ **dan cari nilai "a"**

b) **Diketahui titik potong dgn sumbu x** $(x_1, 0), (x_2, 0)$ **dan 1 titik lain**
Pakai: $y = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$ **dan cari nilai "a"**

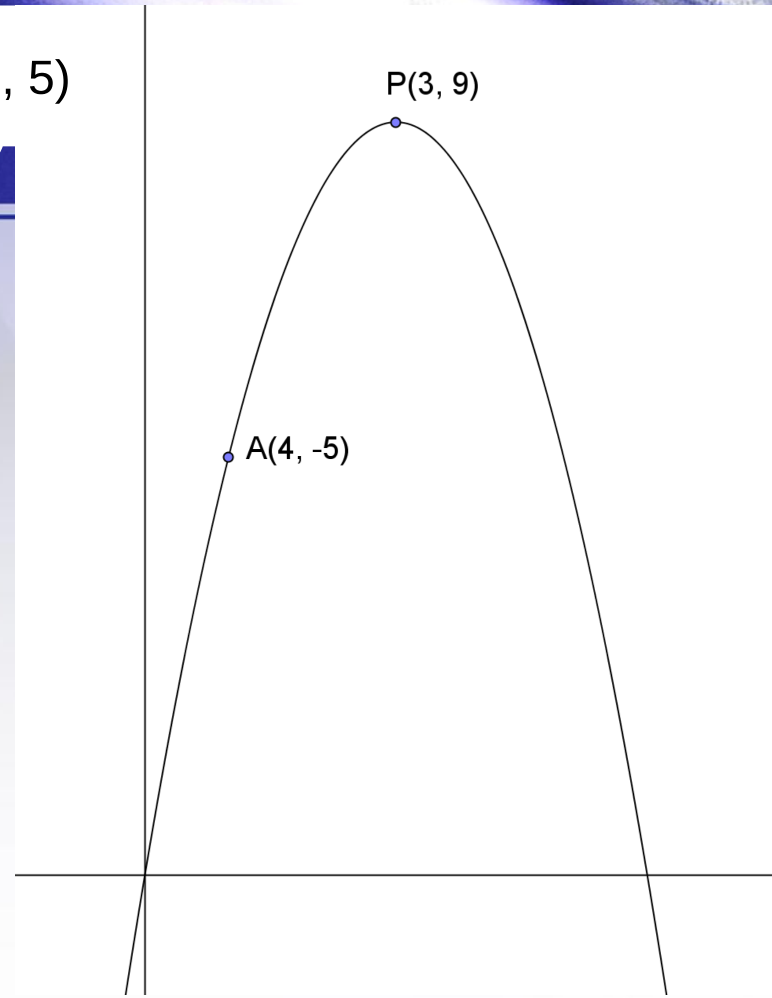
c) **Diketahui 3 titik sembarang**
Pakai: $y = ax^2 + bx + c$ **dgn eliminasi 3 var, cari nilai "a, b, c"**

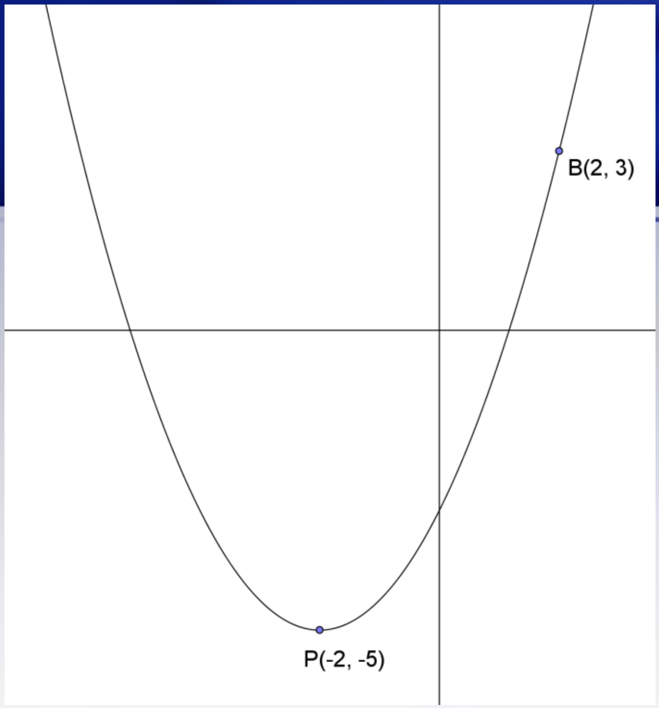

7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3

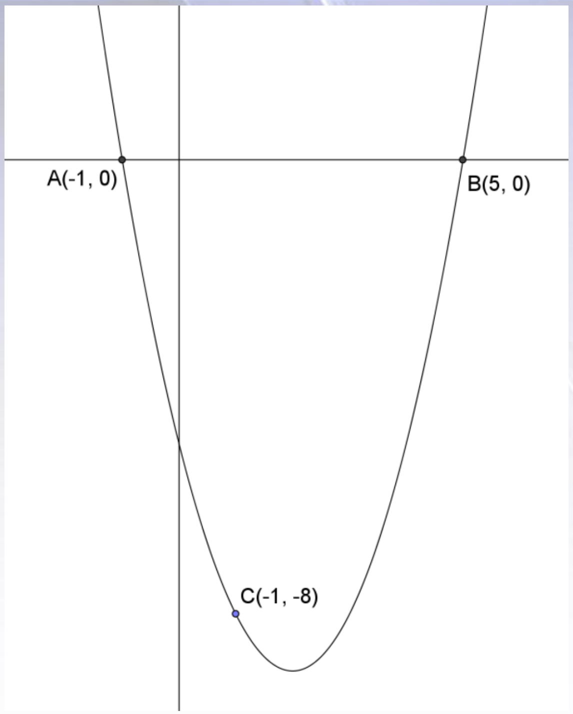

3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2

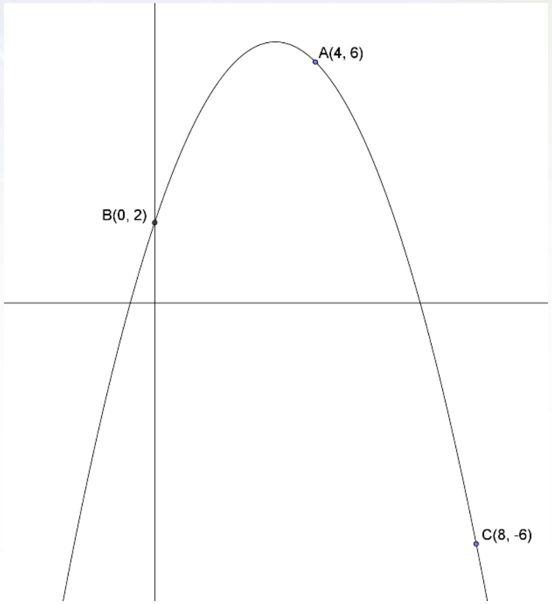


A(1, 5)



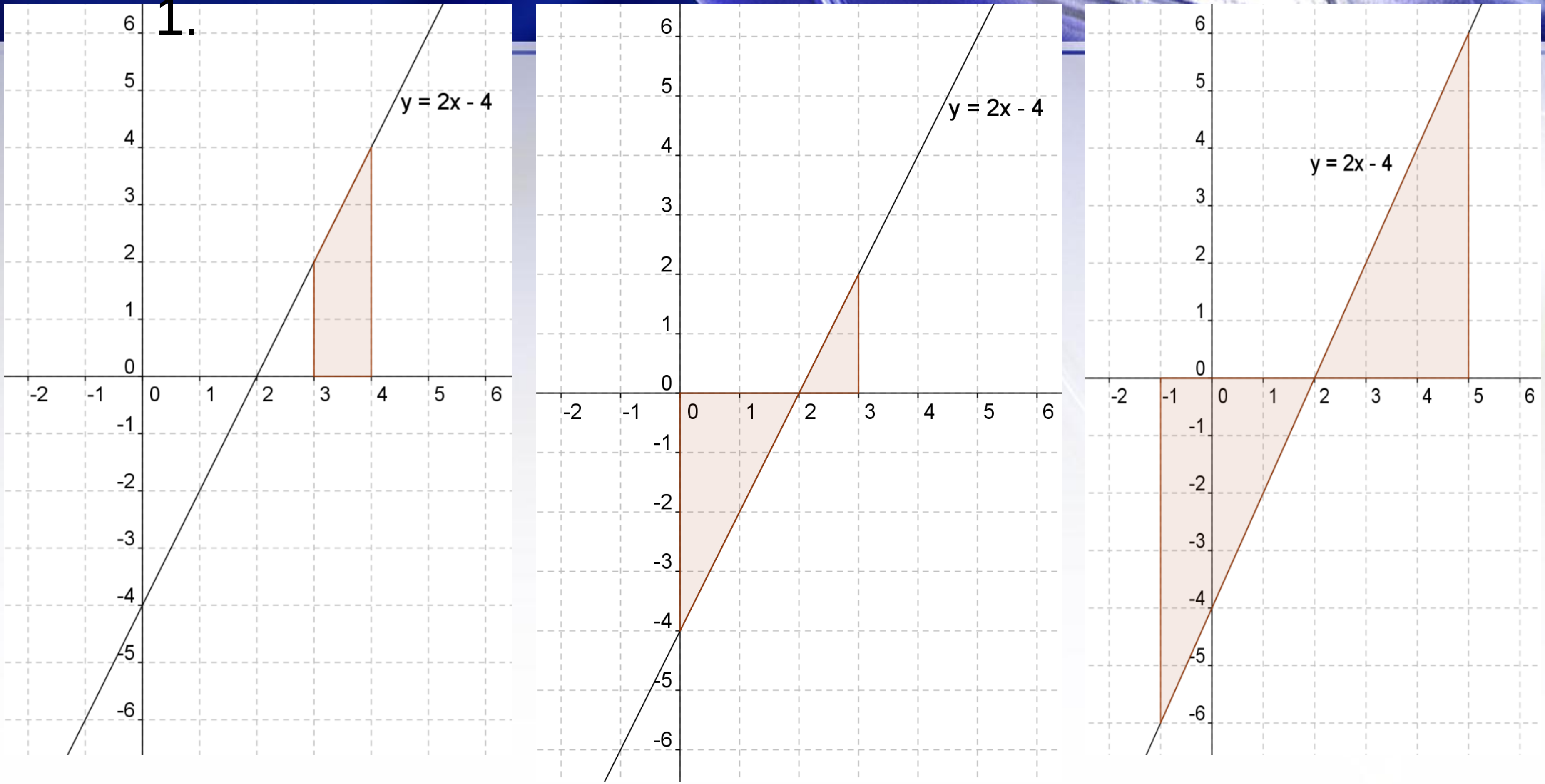

B(2, 3)
P(-2, -5)

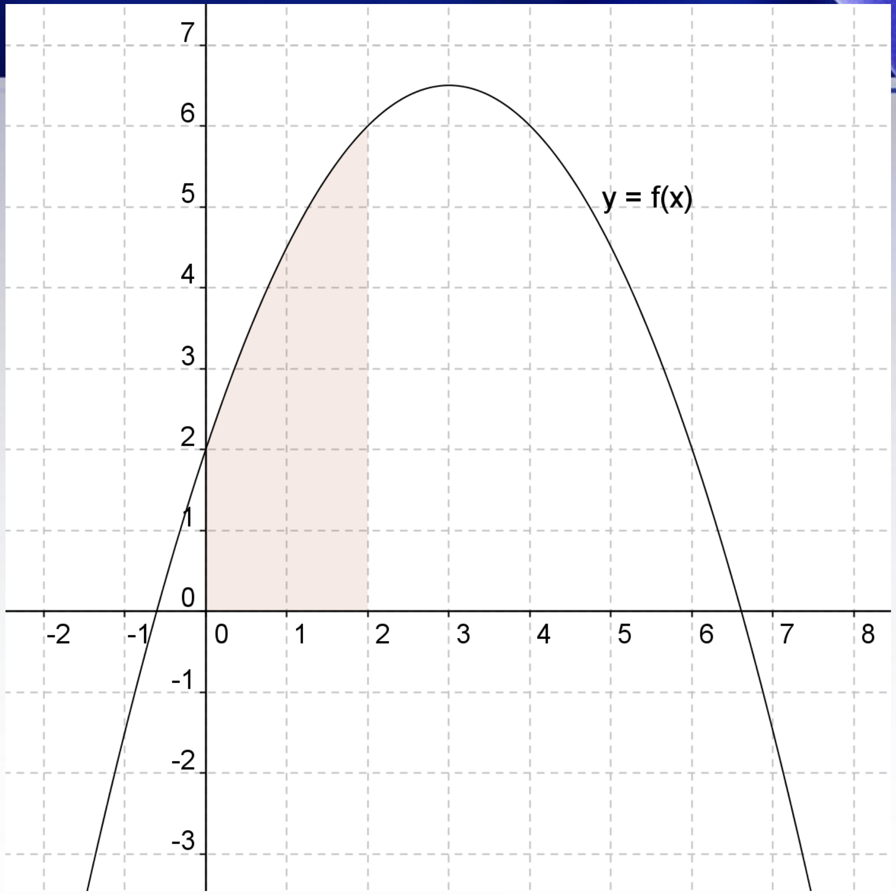

A(-1, 0)
B(5, 0)
C(-1, -8)

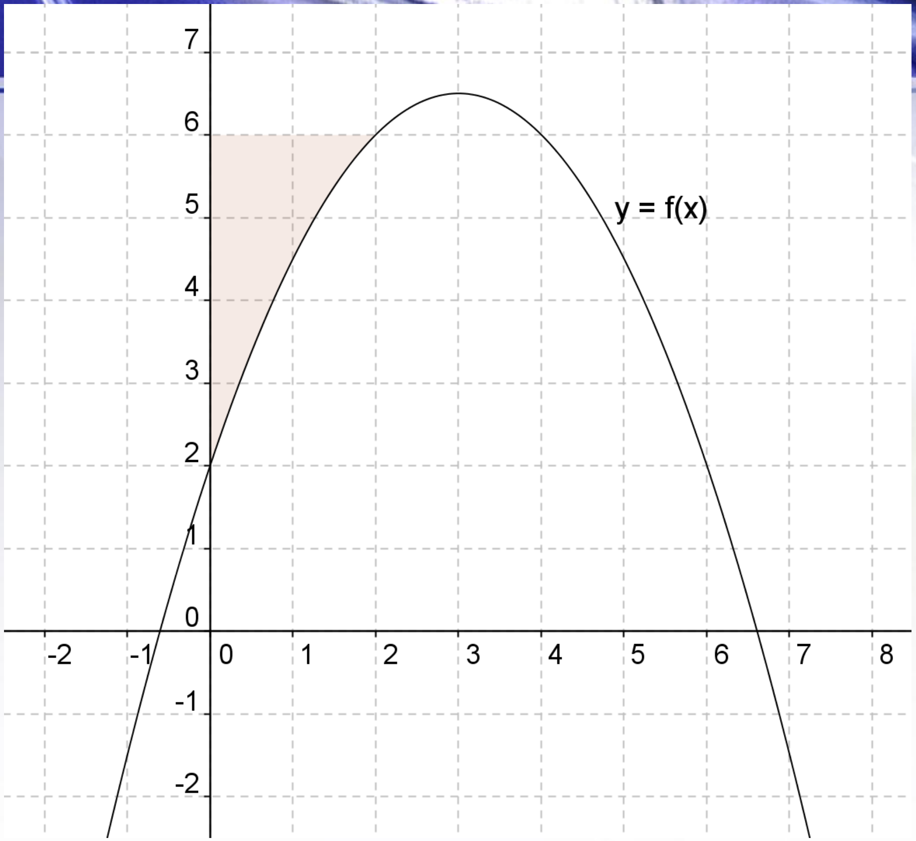

A(4, 6)
B(0, 2)
C(8, -6)

Luas Daerah

1.




y = f(x)
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8


y = f(x)
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8

LUAS DAERAH ANTARA DUAKURVA

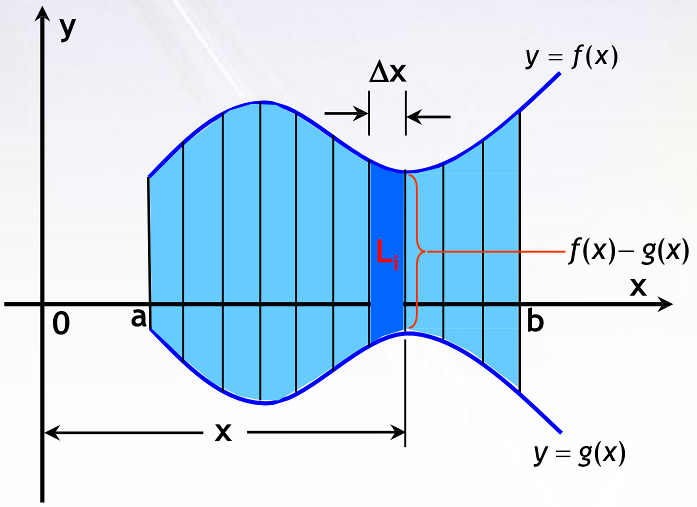
Perhatikan kurva y = $f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $f(x) > g(x)$ pada selang [a, b] di bawah ini. Dengan menggunakan cara : *partisi*, *aproksimasi*, *jumlahkan*, *ambil limitnya*, *integralkan*, maka dapat ditentukan luas daerah antara dua kurva tersebut.

Langkah penyelesaian:

1. Partisi daerahnya
2. Aproksimasi : $L_i \approx [\, f(x) - g(x)\,]\,\Delta x$
4. Jumlahkan : $L \approx \sum [\, f(x) - g(x)\,]\,\Delta x$
5. Ambil limitnya :

   $L = \lim \sum [\, f(x) - g(x)\,]\,\Delta x$
6. Nyatakan dalam integral tertentu

$$L = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$



Contoh 5.

Hitunglah luas daerah tertutup yang dibatasi kurva $y = x^2$ dan garis $y = 2 - x$

Jawab

Langkah penyelesaian:

1. Gambar daerahnya
2. Tentukan titik potong kedua kurva

   $x^2 = 2 - x \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0$

   diperoleh x = -2 dan x = 1
3. Partisi daerahnya
4. Aproksimasi luasnya

   $L_i \approx (2 - x - x^2)\Delta x$

3. Jumlahkan luasnya

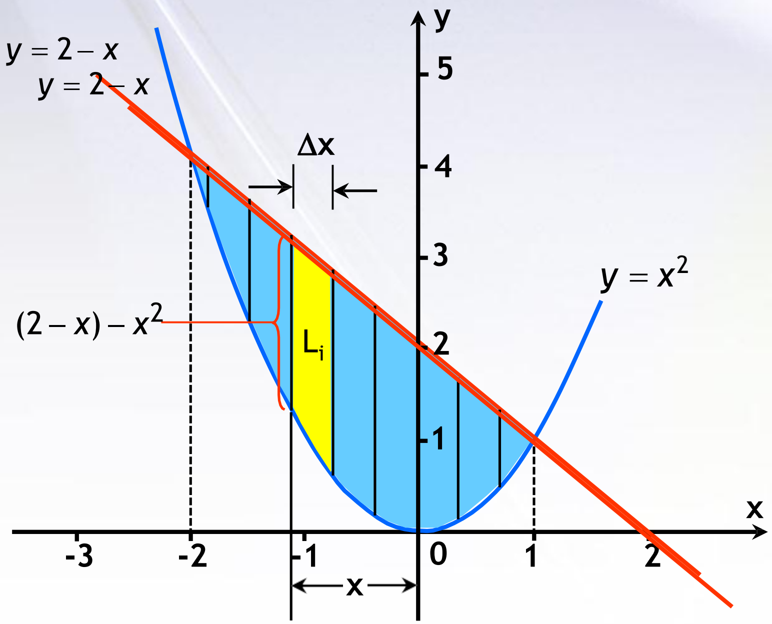
   $L \approx \sum (2 - x - x^2)\Delta x$

4. Tentukan limit jumlah luasnya

   $L = \lim \sum (2 - x - x^2)\Delta x$

6. Nyatakan dalam integral tertentu

$$L = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\, dx$$



$$L = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\, dx$$

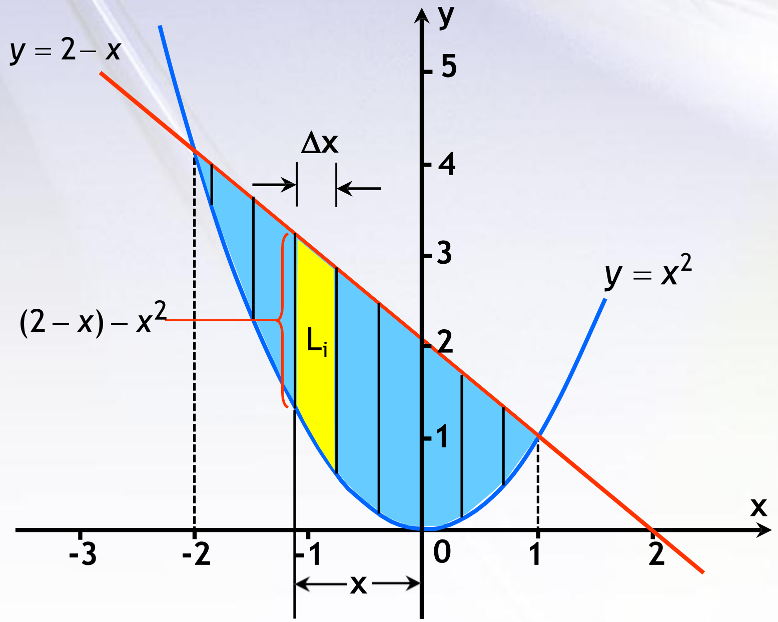
$$L = \left[2x - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{1}$$

$$L = \left(2(1) - \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) - \left(2(-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3} \right)$$

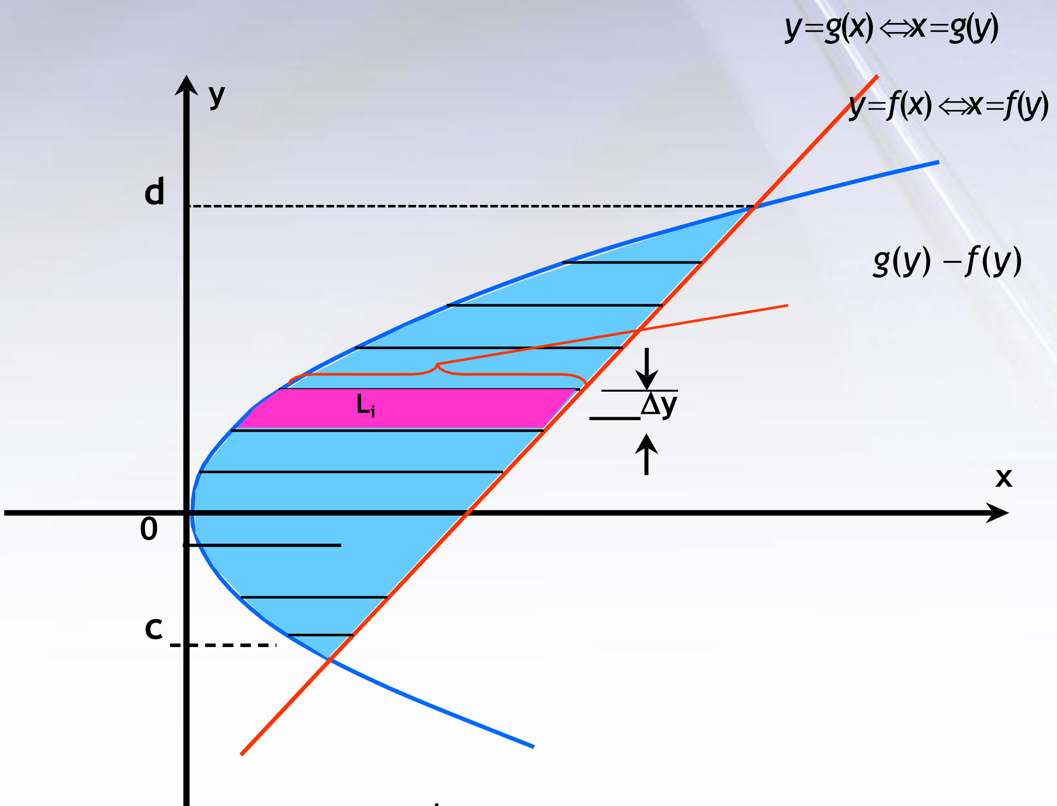
$$L = \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3} \right)$$

$$L = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 + 2 - \frac{8}{3}$$

$$L = 5 - \frac{1}{2} = 4\,\frac{1}{2}$$

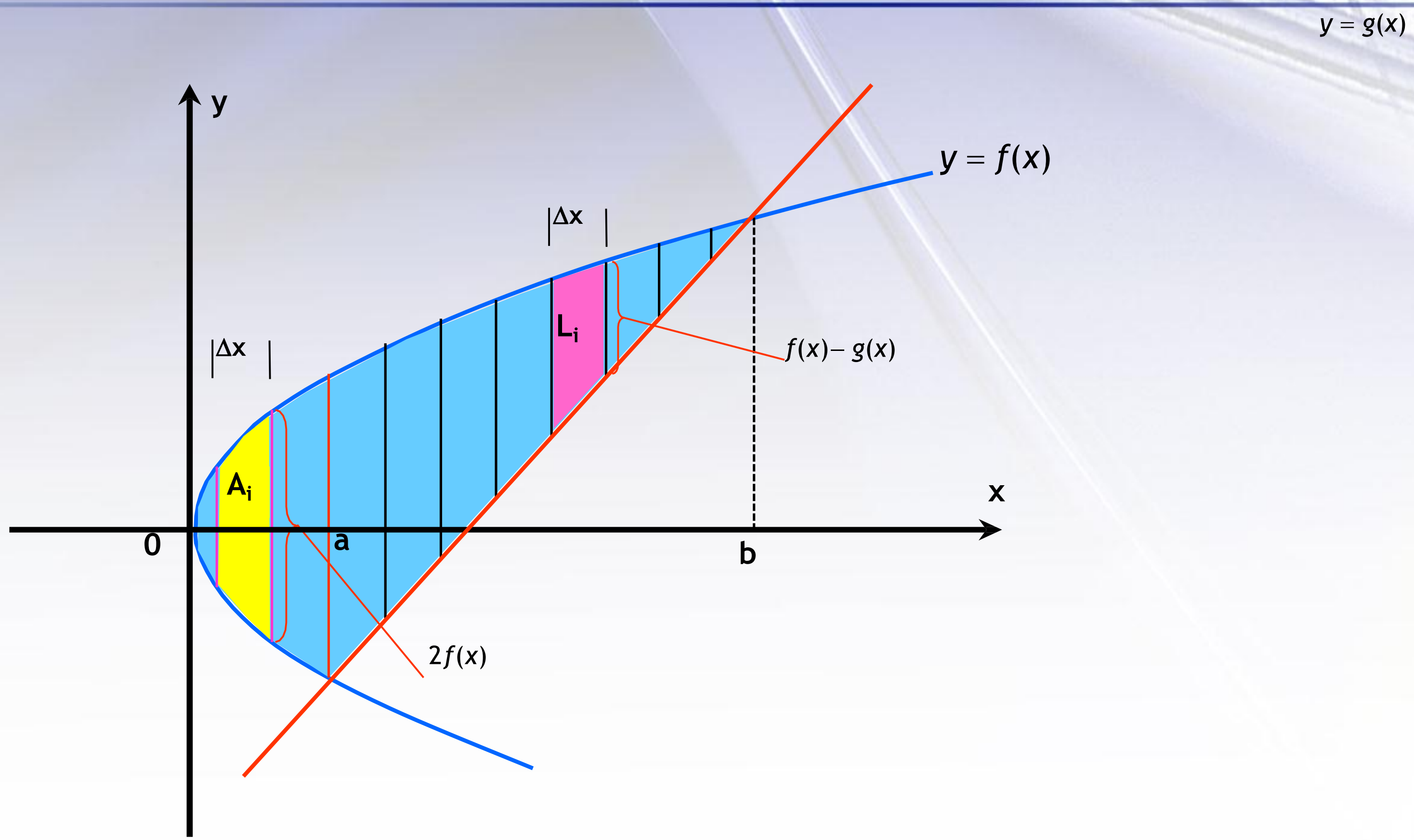


Jika daerah tersebut dipartisi secara horisontal, maka akan diperoleh satu bentuk integral yang menyatakan luas daerah tersebut. Sehingga penyelesaiannya menjadi lebih sederhana dari sebelumnya.



Luas daerah = $\int_c^d (g(y)-f(y))\,dy$

Untuk kasus tertentu pemartisian secara vertikal menyebabkan ada dua bentuk integral. Akibatnya diperlukan waktu lebih lama untuk menghitungnya.



Luas daerah = $\int_0^a 2f(x)\,dx + \int_a^b (f(x) - g(x))dx$

Contoh 6.

Hitunglah luas daerah yang dibatasi kurva $y^2 = x$, garis $x + y = 6$, dan sumbu x

Jawab

Langkah penyelesaian:

1. Gambar daerahnya
2. Tentukan titik potong kedua kurva

   $y^2 = 6 - y \rightarrow y^2 + y - 6 = 0 \rightarrow (y + 3)(y - 2) = 0$

   diperoleh $y = -3$ dan $y = 2$
3. Partisi daerahnya
4. Aproksimasi luasnya

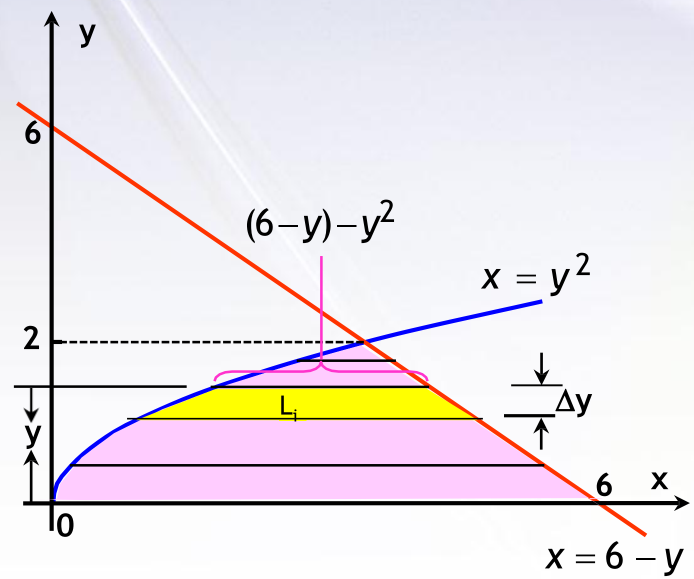
   $L_i \approx (6 - y - y^2)\Delta y$

3. Jumlahkan luasnya

   $L \approx \sum (6 - y - y^2)\Delta y$
5. Tentukan limitnya

   $L = \lim \sum (6 - y - y^2)\Delta y$
6. Nyatakan dalam integral tertentu

   Luas daerah = $\int_0^2 \left(6 - y - y^2\right) dy$



$(6 - y - y^2)dy$

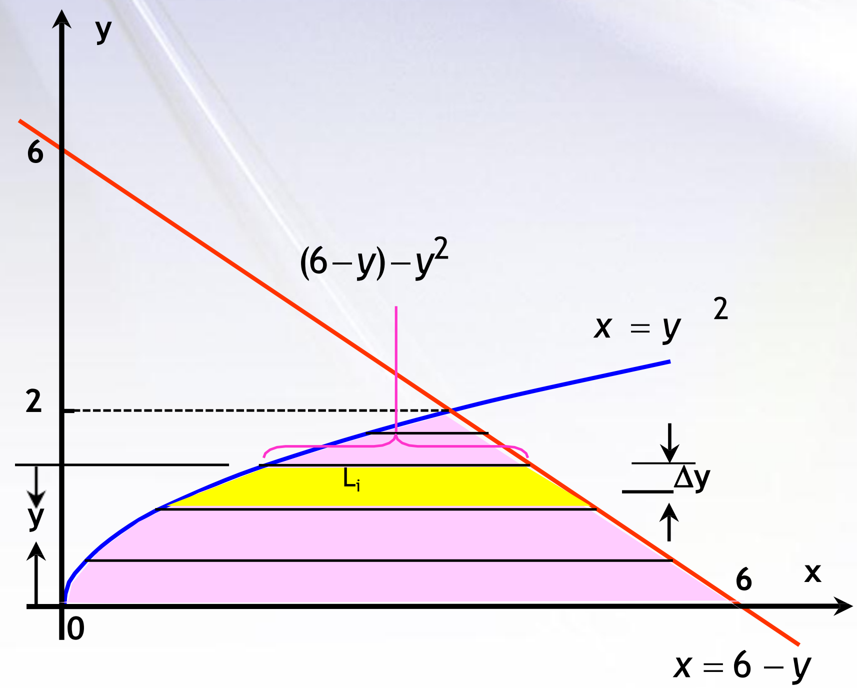
Luas daerah = $\int_0^2$

Luas daerah = $\left[6y - \frac{y}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^2$

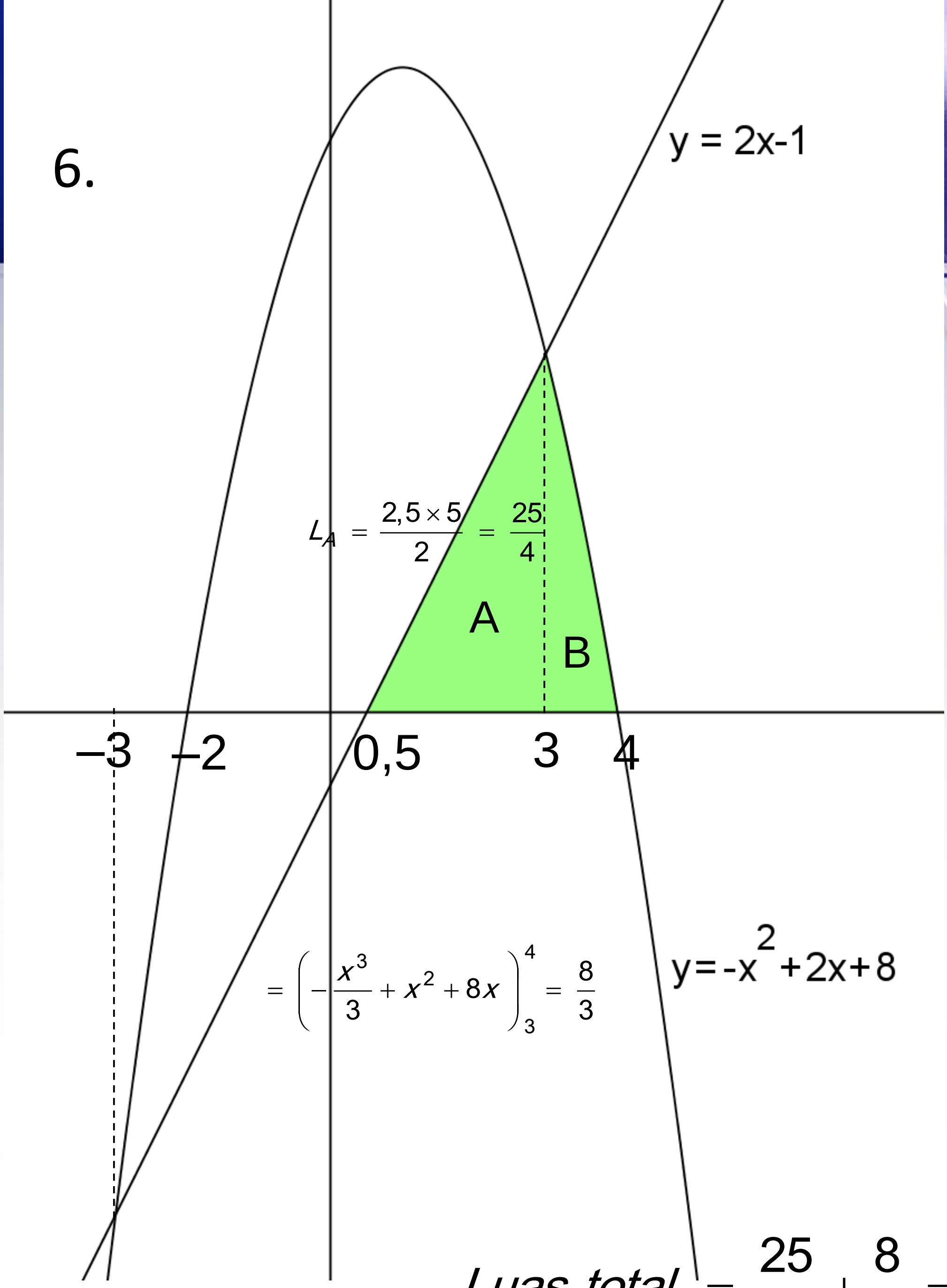
Luas daerah = $\left(6(2) - \frac{2}{2} - \frac{2^3}{3}\right) - 0$

Luas daerah = $\left(12 - 1 - \frac{8}{3}\right)$

Luas daerah = $\frac{25}{3}$



6.



$$L_A = \frac{2,5 \times 5}{2} = \frac{25}{4}$$

Cari titik potong garis & parabola

$2x - 1 = -x^2 + 2x + 8$

$x^2 = 9 \rightarrow x_1 = 3, \quad x_2 = -3$

Titik potong garis & sumbu x

$2x - 1 = 0 \rightarrow x = 0,5$

$$L_B = \int_3^4 \left(-x^2 + 2x + 8\right) dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + 8x\right)_3^4 = \frac{8}{3}$$

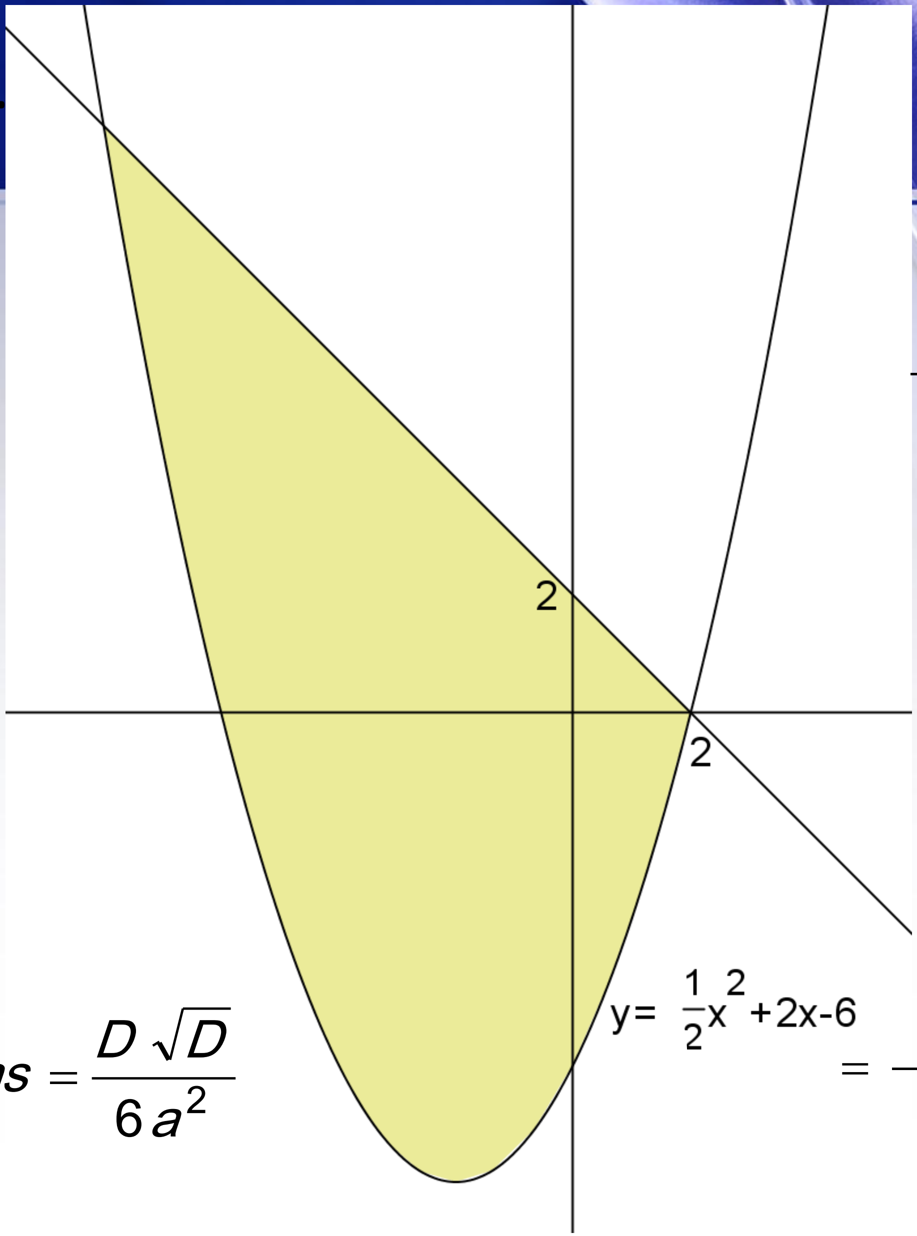
Titik potong parabola & sumbu x

$-x^2 + 2x + 8 = 0$

$x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow 4 \vee -2$

$$Luas\ total = \frac{25}{4} + \frac{8}{3} = \frac{107}{12}$$

7.



$$g(x) = -x + 2$$

Titik potong garis & parabola:

$$-x + 2 = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$$

$$-\frac{1}{2}x^2 - 3x + 8 = 0 \rightarrow x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$(x - 2)\,(x + 8) = 0 \rightarrow x = 2 \vee -8$$

$$Luas = \int_{-8}^{2} \left(-\frac{1}{2}x^2 - 3x + 8\right) dx$$

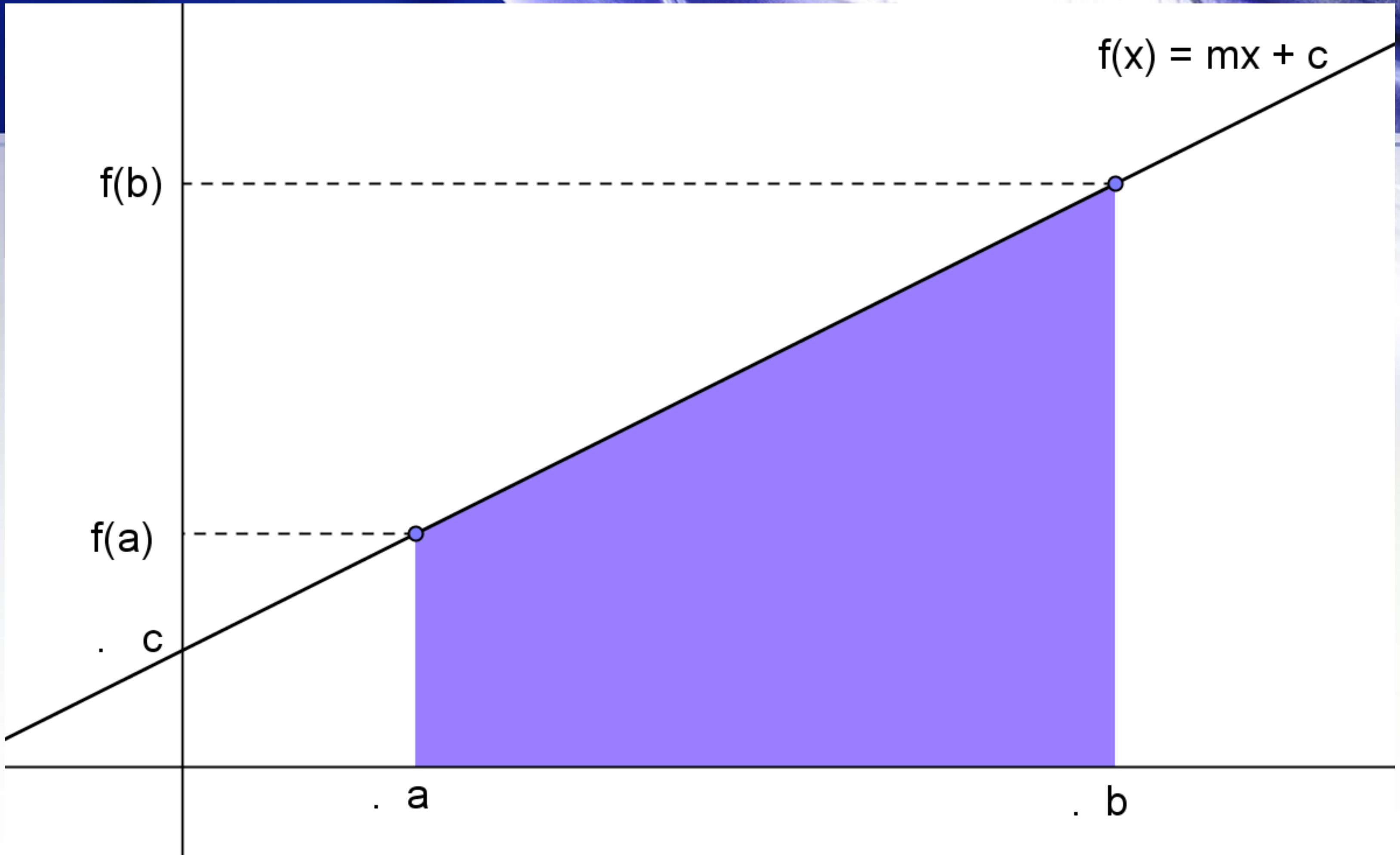
$$= \left(-\frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + 8x\right)_{-8}^{2}$$

$$= -\frac{4}{3} - 6 + 16 - \left(\frac{256}{3} - 96 - 64\right) = \frac{250}{3}$$

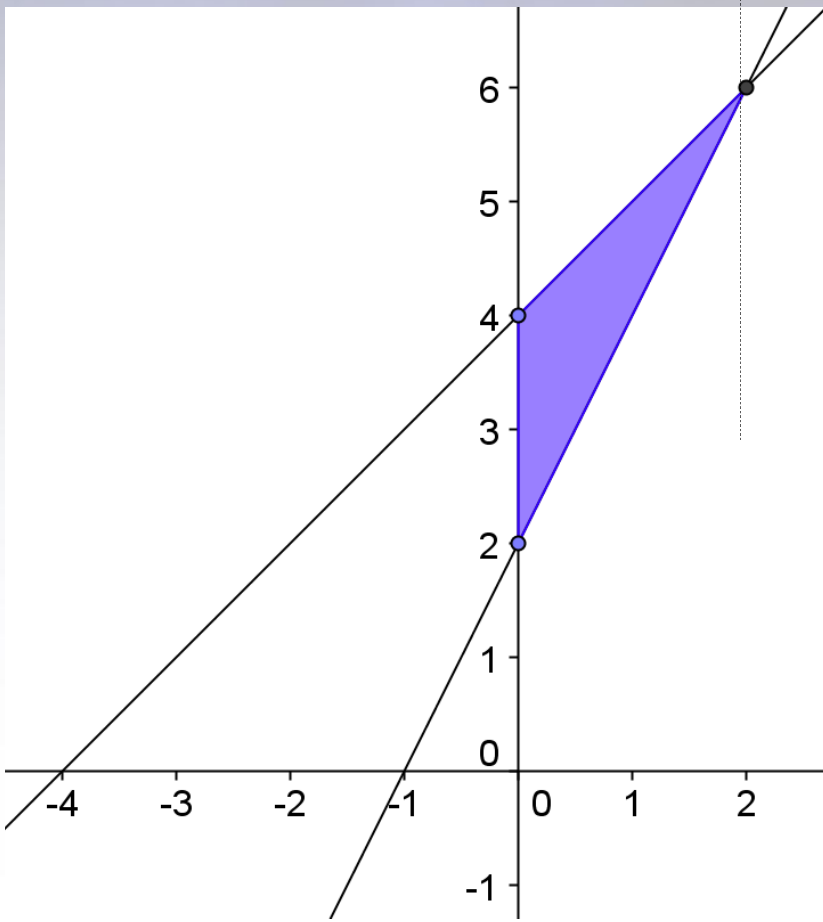
$$Luas = \frac{D\sqrt{D}}{6a^2}$$

$$-0{,}5x^2 - 3x + 8 = 0 \rightarrow D = (-3)^2 - 4\,(-0{,}5)\,8 = 25$$

$$Luas = \frac{25\sqrt{25}}{6 \times 0{,}5^2} = \frac{250}{3}$$



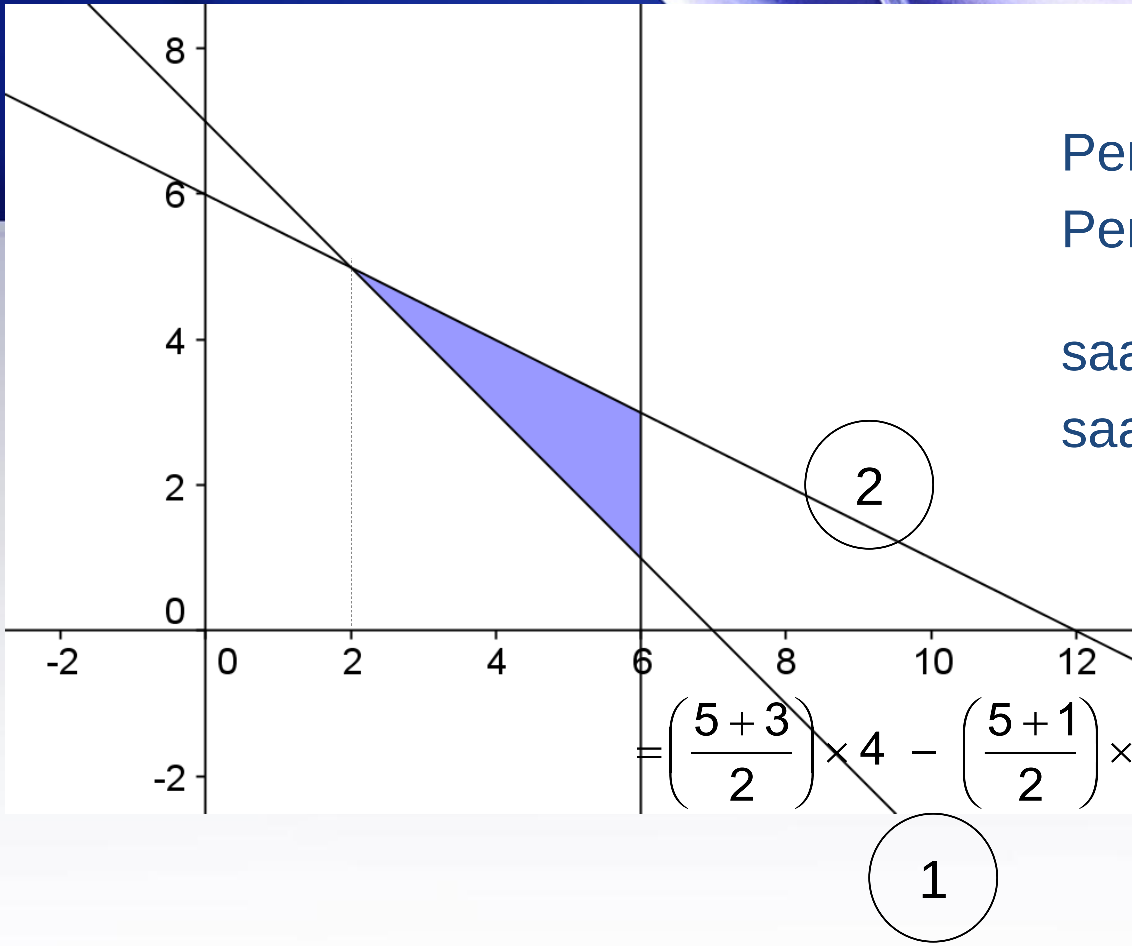
$$\text{Buktikan luas arsiran} = \frac{f(a)+f(b)}{2} * (b-a)$$



Luas arsiran

= trapes besar – trapes kecil

$$=\left(\frac{4+6}{2}\right)\times 2 \; - \; \left(\frac{2+6}{2}\right)\times 2 \; = \; 2$$



Pers. garis 1: $y = 7 - x$

Pers. garis 2: $y = 6 - 0{,}5x$

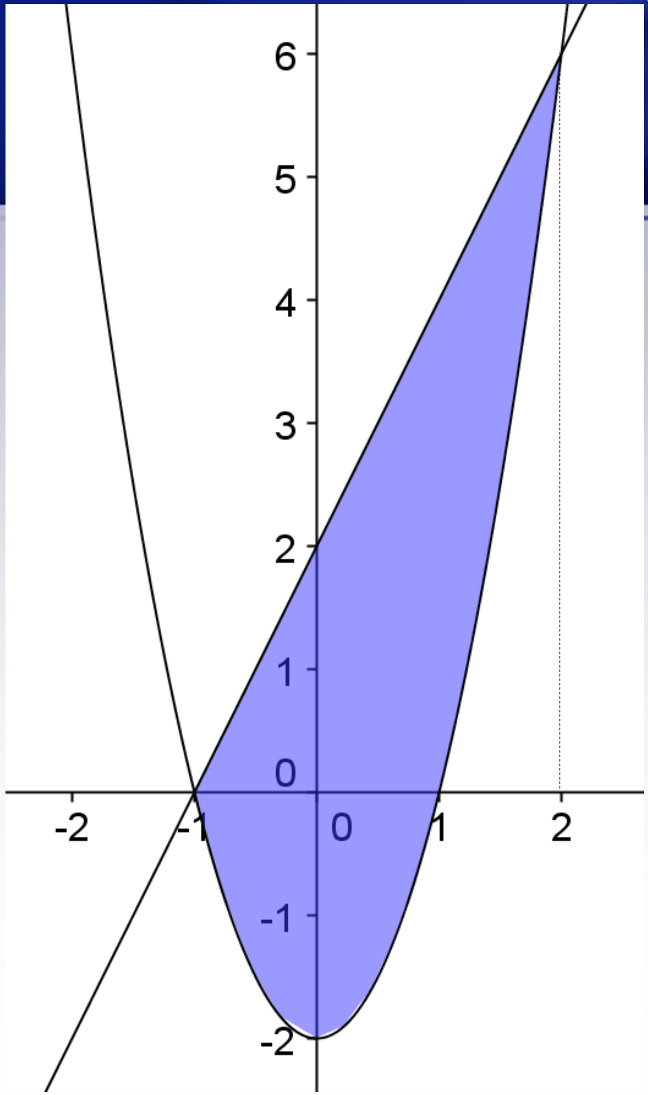
saat $x = 2 \rightarrow y_1 = 5 \;\&\; y_2 = 5$

saat $x = 6 \rightarrow y_1 = 1 \;\&\; y_2 = 3$

$$= \left(\frac{5+3}{2}\right) \times 4 - \left(\frac{5+1}{2}\right) \times 4 = 4$$

Luas arsiran

= trapes besar – trapes kecil



Pers. garis : $y = 2x + 2$

Pers. parabola : $y = 2x^2 - 2$

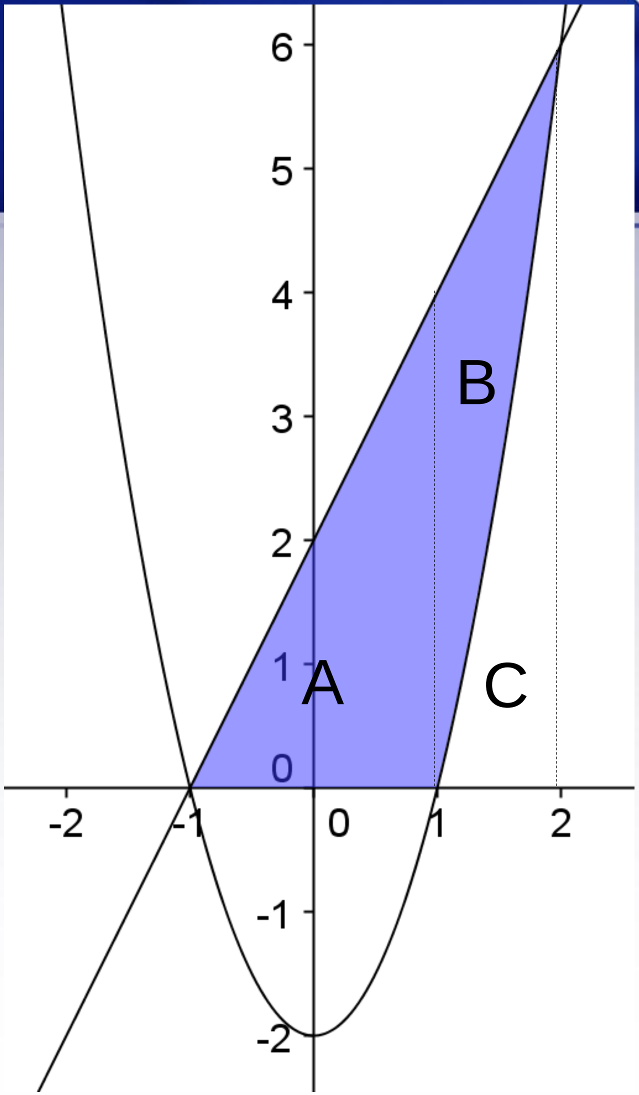
Atas kurang Bawah:

$2x + 2 - (2x^2 - 2) = 0$

$2x + 4 - 2x^2 = 0$

$$\textit{Luas arsiran} = \frac{D\sqrt{D}}{6a^2} = \frac{36\sqrt{36}}{6\times(-2)^2} = \frac{36\times 6}{6\times 4} = 9$$

Diskriminan: $D = 2^2 - 4\,.(-2)\,.4 = 36$



Pers. garis : $y = 2x + 2$

Pers. parabola : $y = 2x^2 - 2$

Luas A = 0,5 . 2 . 4 = 4

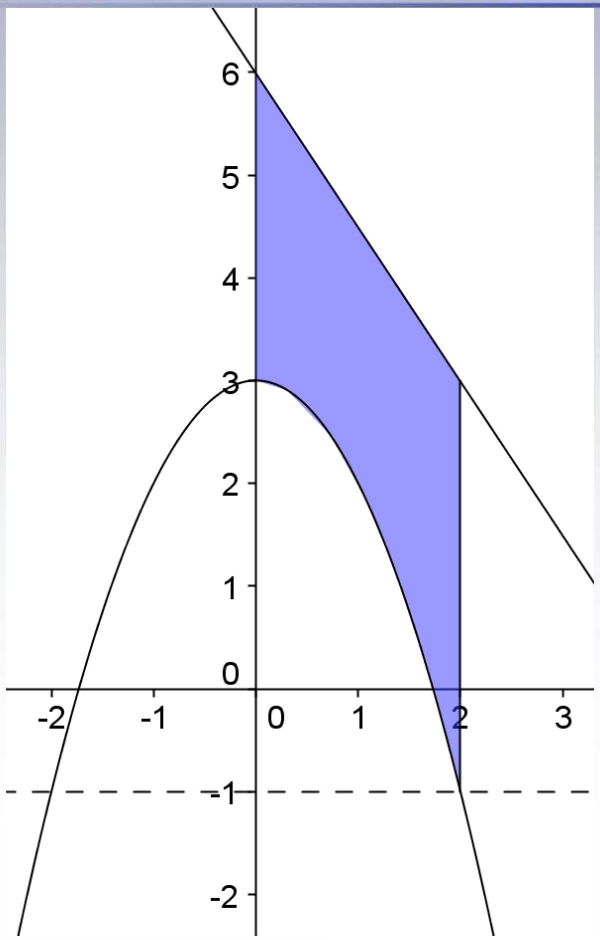
Luas trapesium BC:

= 0,5 (4 + 6) x 1 = 5

$$Luas\ C = \int_1^2 \left(2x^2 - 2\right)dx = \left(\frac{2x^3}{3} - 2x\right)_1^2$$

$$= \frac{16}{3} - 4 - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{8}{3}$$

Luas arsiran = 4 + 5 – 8/3 = 19/3



Pers. garis : $y = -1{,}5x + 6$

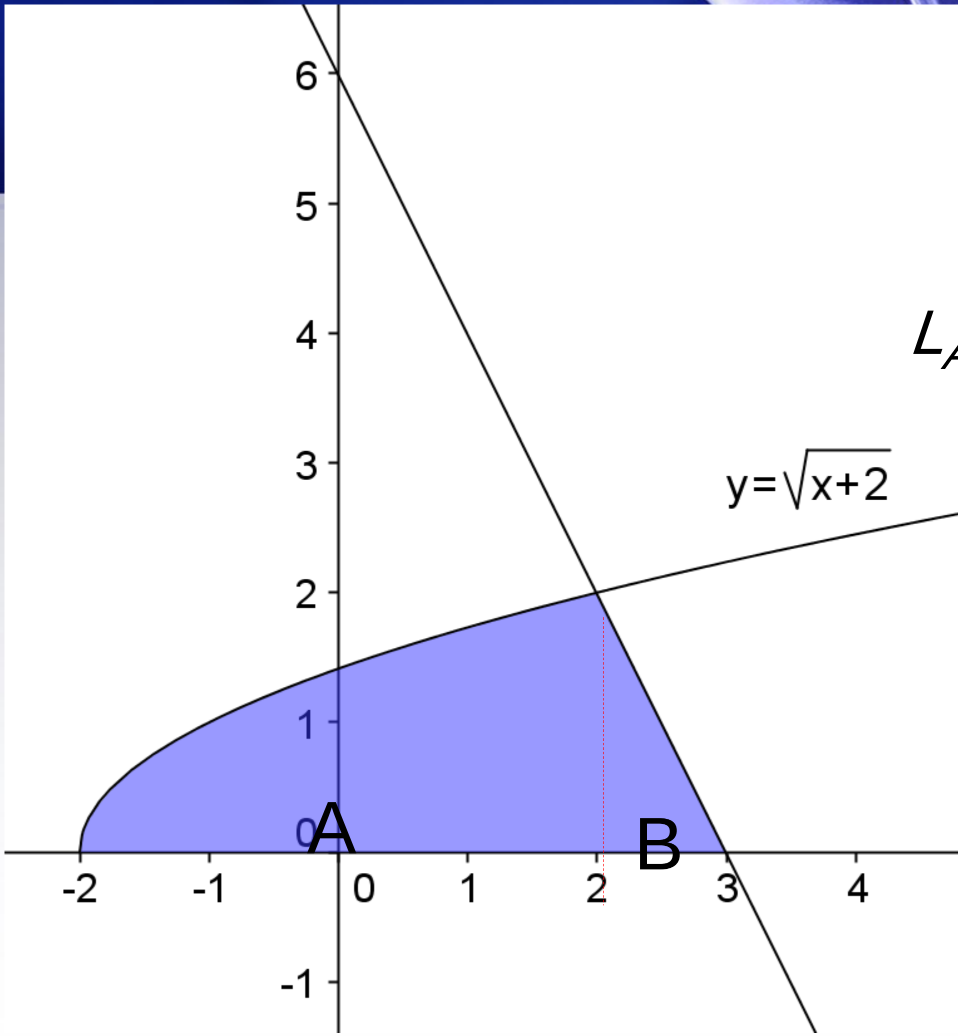
Pers. parabola : $y = 3 - x^2$

Atas – bawah :

$-1{,}5x + 6 - (3 - x^2) = x^2 - 1{,}5x + 3$

$$Luas\ arsiran = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{3}{2}x + 3 \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{4} + 3x \right)_0^2$$

$$= \frac{8}{3} - 3 + 6 = \frac{17}{3}$$



Pers. garis: y = –2x + 6

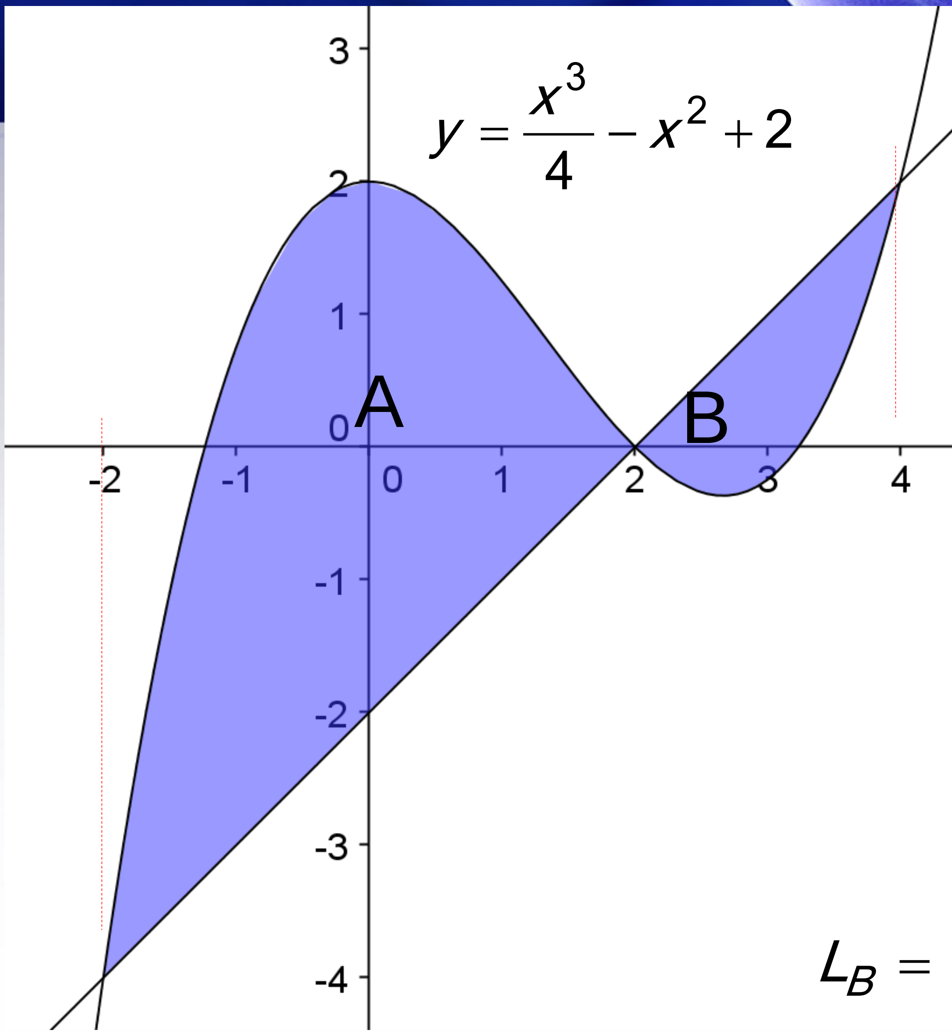
$$L_A = \int_{-2}^{2} (x+2)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2}{3}\left((x+2)^{\frac{3}{2}}\right)_{-2}^{2}$$

$$= \frac{2}{3}(8-0) = \frac{16}{3}$$

$L_B = 0{,}5 \;.\; 1 \;.\; 2 = 1$

$L_{arsir} = 16/3 + 1 = 19/3$

Pers. garis: y = x – 2



$$L_A=\int_{-2}^{2}\left[\frac{x^3}{4}-x^2+2\ -(\ x-2)\right]dx$$

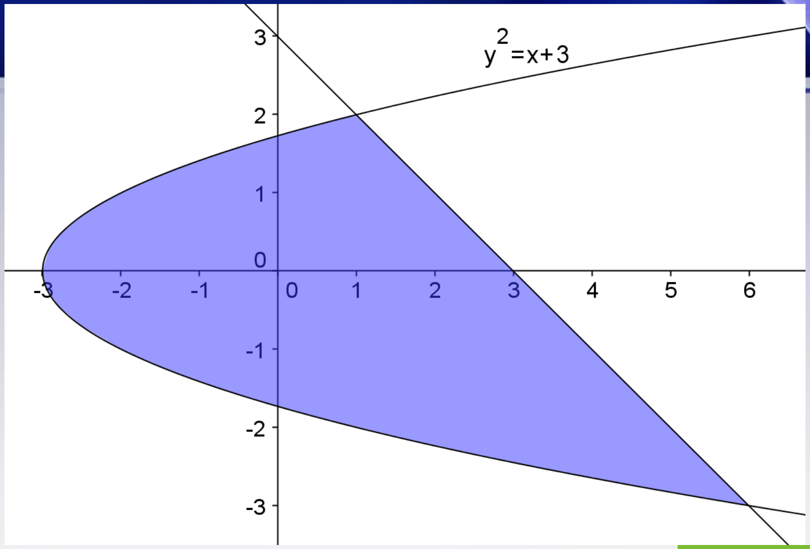
$$=\int_{-2}^{2}\left(\frac{x^3}{4}-x^2-x+4\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^4}{16}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+4x\right)_{-2}^{2}$$

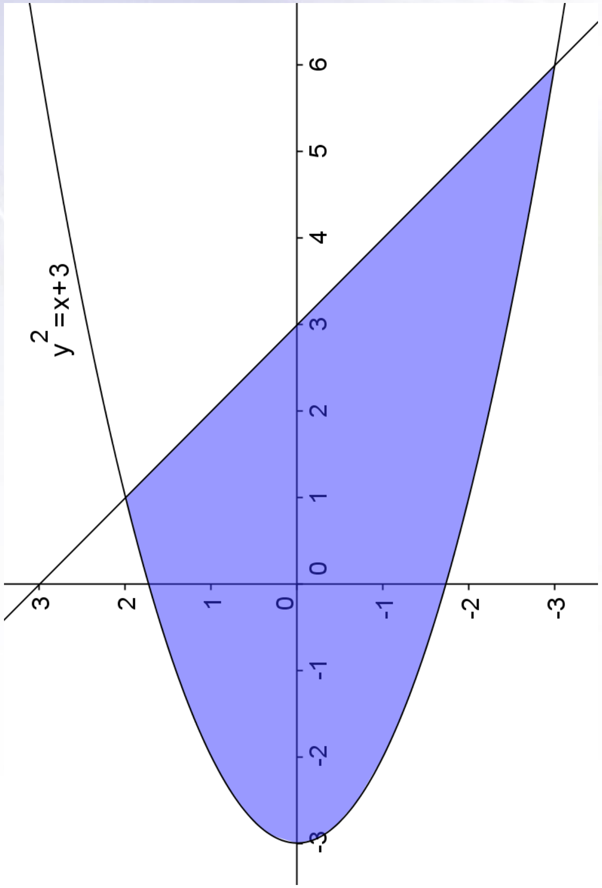
$$=\cancel{1}-\frac{8}{3}-\cancel{2}+8\ -\left(\cancel{1}+\frac{8}{3}-\cancel{2}-8\right)=\frac{32}{3}$$

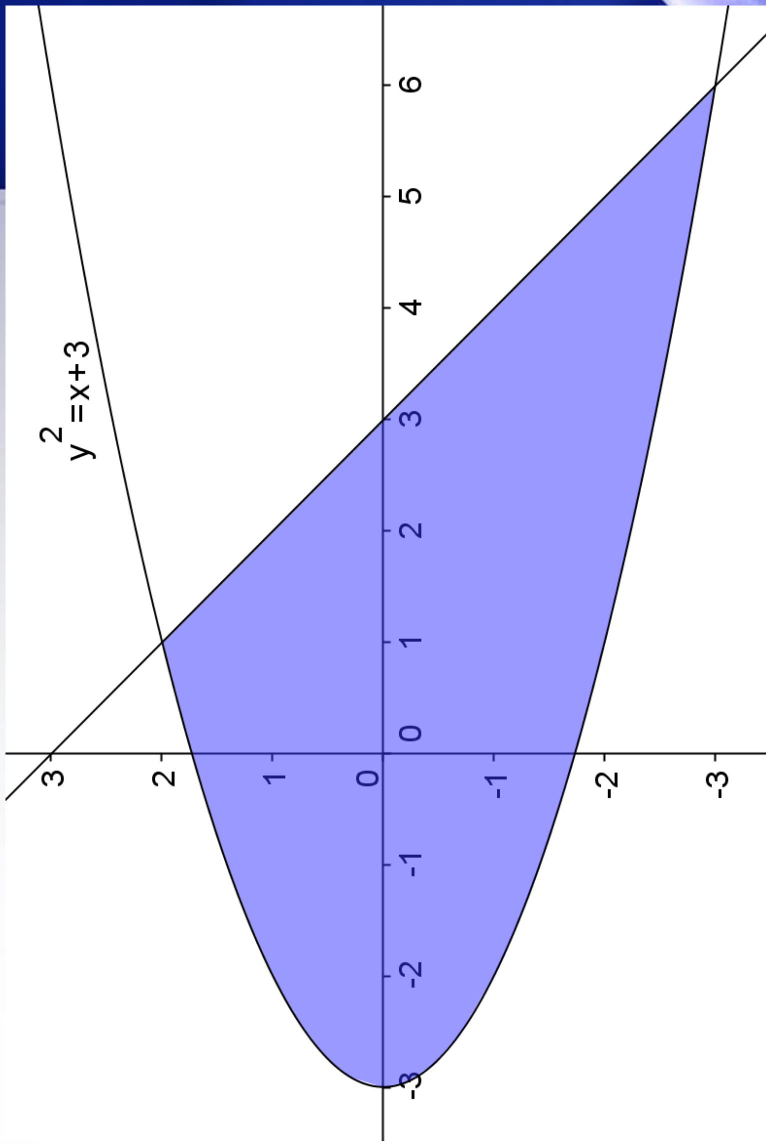
$$L_B=\int_{2}^{4}\left[x-2\ -\left(\frac{x^3}{4}-x^2+2\right)\right]dx=\frac{5}{3}$$

L_{arsir} = 32/3 + 5/3 = 37/3



Grafik diputar menjadi →





Parabola : $x^2 = y + 3$

Garis : $y = x + 3$

$$Luas\ arsiran = \frac{D\sqrt{D}}{6a^2} = \frac{25\sqrt{25}}{6 \times (-1)^2} = \frac{125}{6}$$

Atas – bawah :

$x + 3 – (x^2 – 3) = –x^2 + x + 6$

$D = 1^2 – 4 \,.\, (–1) \,.\, 6 = 25$