DISTRIBUSI PELUANG TEORITIS

1. PENDAHULUAN

Titik-titik contoh di dalam ruang sampel (S) dapat disajikan dalam bentuk numerik/ bilangan

- **Peubah acak**

  Fungsi yang mendefiniskan titik-titik contoh dalam ruang contoh sehingga memiliki nilai berupa bilangan nyata disebut PEUBAH ACAK= VARIABEL ACAK= RANDOM VARIABEL (beberapa buku juga menyebutkan sebagai STOCHASTIC VARIABLE)

- **X dan x**

  Biasanya PEUBAH ACAK dinotasikan sebagai X (X kapital). Nilai dalam X dinyatakan sebagai x (huruf kecil x)

  Contoh 1:

  Pelemparan sekeping mata uang setimbang sebanyak 3 kali. S: (GGG, GGA, GAG, AGG, GAA, AGA, AAG, AAA). Dimana G= GAMBAR dan A= ANGKA. X: menyatakan banyaknya sisi GAMBAR (G) yang muncul

S:	GGG,	GGA,	GAG,	AGG,	GAA,	AGA,	AAG,	AAA
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	3	2	2	2	1	1	1	0

  Perhatikan bahwa X bisa bernilai 0,1,2,3 atau

  X (GGG) = 3, X (GGA) = 2,………, x (AAA) = 0

- **Kategori Peubah Acak**

  Peubah acak dapat dikategorikan menjadi:

a. Peubah acak diskrit: nilai yang mungkin berupa bilangan cacah (dapat dihitung) dan bisa terhingga atau tak terhingga

Misal:

X= {0,1,2,3} dimana X= banyaknya gambar yang muncul pada pelemparan 3 mata uang

Y= {0,1,2,…} dimana Y= banyaknya sambungan telepon pada kantrol sentral telepon dalam satu hari

b. Peubah acak kontinu: nilainya berupa selang bilangan, tidak dapat dihitung dan tidak terhingga (memungkinkan pernyataan dalam bilangan pecahan/ desimal). → untuk hal-hal yang diukur (jarak, waktu, berat, volume)

Misal:

Jarak pabrik ke pasar	= 35.57 km
Waktu produksi perunit	= 15.07 menit
Berat bersih produk	= 209.63 gram
Volume kemasan	= 100.00 cc

- **Distribusi peluang teoritis**

  Tabel atau rumus yang mencantumkan semua kemungkinan nilai peubah acak berikut peluangnya

  Berhubungan dengan kategori peubah acak, maka dikenal:

  a. Distribusi peluang diskrit: Seragam*), Binomial*), Hipergeometrik*), Poisson*)

  b. Distribusi peluang kontinu: Normal*), t, F, x^2 (chi kuadrat)

  *): akan dipelajari dalam pelajaran kali ini

2. DISTRIBUSI PELUANG DISKRIT

2.1. Distribusi Peluang Seragam

Definisi distribusi peluang seragam:

Jika peubah acak X mempunyai nilai x_1, x_2, x_3, …, x_k yang berpeluang sama, maka distribusi peluang seragamnya adalah

$$f(x,k)\frac{1}{k} \qquad untuk\ x = x_1, x_2, x_3, \dots., x_k$$

Contoh 2:

Jika Abi, Badu, dan Cici berpeluang sama mendapat beasiswa, maka distribusi peluang seragamnya adalah:

$$f(x,3)\frac{1}{3} \qquad untuk\ x = Abi, Badu, Cici\ atau\ @$$
$$= 1{,}2{,}3\ (mahasiswa\ dinomori)$$

Secara umum: nilai k dapat dianggap sebagai kombinasi n dari N:

$$k = C_n^N$$

N= banyaknya titik contoh dalam ruang contoh/ populasi

n= ukuran sampel acak= banyaknya unsur peubah acak X

Contoh 3:

Jika kemasan batu baterai terdiri dari 4 batu baterai, maka bagaimana distribusi peluang seragam cara menyusun batu baterai untuk 12 buah?

Jawab:

$$k = C_n^N = C_4^{12} = \frac{12!}{4!\,8!} = 495 --> ada\ 495\ cara$$

$$f(x,k) = f(x,495) = \frac{1}{495}\ untuk\ x = 1{,}2{,}3, \dots \dots ,495$$

2.2. Distribusi Peluang Binomial

- Percobaan Binomial

  Percobaan binomial adalah percobaan yang mempunyai ciri-ciri sebagai berikut:

  1. Percobaan diulang n kali
  2. Hasil setiap ulangan hanya dapat dikategorikan ke dalam 2 kelas. Misal BERHASIL ATAU GAGAL (YA atau TIDAK; SUCCESS or FAILED)
  3. Peluang keberhasilan = p dan dalam setiap ulangan nilai p tidak berubah. Peluang gagal= q= 1-p
  4. Setiap ulangan bersifat bebas satu dengan yang lain

Definisi Distribusi Peluang Binomial:

$b(x;n,p) = C_x^n p^x q^{n-x} \;\; untuk \; x = 0,1,2,3,\ldots\ldots.,n$

n= banyaknya ulangan

x= banyak keberhasilan dalam peubah acak X

p= peluang berhasil pada setiap ulangan

q= peluang gagal = 1-p pada setiap ulangan

Catatan:

Untuk memudahkan membedakan p dengan q Anda terlebih dahulu harus dapat menetapkan mana kejadian SUKSES dan mana yang GAGAL. Anda dapat menetapkan bahwa kejadian yang ditanyakan adalah kejadian SUKSES

Contoh 4a:

Tentukan peluang mendapatkan MATA 1 muncul tiga kali pada pelemparan lima kali sebuah dadu seimbang. Kejadian sukses/ berhasil= mendapat MATA 1

x= 3

n= 5 → pelemparan diulang 5 kali

p= 1/6

$b(x;n,p) = C_x^n p^x q^{n-x}$

$b\left(3;5,\frac{1}{6}\right) = C_3^5 (\frac{1}{6})^3 (\frac{5}{6})^2$

$= \frac{5!}{3!\,2!} . \frac{5^2}{6^5} = 10x0.00321.5 = 0.03215$

Contoh 4b:

Peluang seorang mahasiswa membolos adalah 6/10, jika terdapat 5 mahasiswa, berapa peluang terdapat 2 orang mahasiswa yang tidak membolos?

Jawab:

Kejadian yang ditanyakan → kejadian SUKSES = TIDAK MEMBOLOS. Yang diketahui peluang MEMBOLOS= q= 6/10= 0,60

p= 1-q= 1-0,60= 0,40   x=2 n=5

$b(x = 2; n = 5, p = 0{,}40) = C_2^5 (0{,}40)^2 (0{,}60)^3 = 0{,}3456$

Atau lihat tabel A.2

Contoh 5:

Suatu perusahaan "pengiriman paket" terikat perjanjian bahwa keterlambatan paket akan menyebabkan perusahaan harus membayar biaya kompensasi. Jika peluang setiap kiriman akan terlambat adalah 0,20. Bila terdapat 5 paket, hitunglah probabilitas:

a. Tidak ada paket yang terlambat, sehingga perusahaan tidak membayar biaya kompensasi (x= 0)
b. Lebih dari dua paket terlambat (x > 2)
c. Tidak lebih dari 3 paket yang terlambat (x ≤ 3)
d. Ada 2 sampai 4 paket yang terlambat (2 ≤ x ≤ 4)
e. Paling tidak, ada 2 paket yang terlambat (x ≥ 2)

Jawab:

a. P (X = 0) = b (0; 5, 0,20) = 0,3277 (lihat tabel A.2)
b. P (X > 2)
   $= 1 - P(x \leq 2)$
   $= 1 - \sum_{x=0}^{2} b(x; 5{,}0{,}20)$
   $= 1 - 0{,}9421$
   $= 0{,}0579$
c. $P(X \leq 3) = \sum_{x=0}^{3} b(x; 5{,}0{,}20) = 0{,}9933$
d. $P(2 \leq X \leq 4) = \sum_{x=0}^{4} b(x; 5{,}0{,}20) - \sum_{x=0}^{1} (x; 5{,}0{,}20)$

$= 0{,}9997 - 0{,}7373$

$= 0{,}2624$

e. Dicoba!

Rata-rata dan Ragam Distribusi Binomial b(x;n,p)adalah:

$$Rata - rata\ \mu = np$$

$$Ragam\ \sigma^2 = npq$$

n= ukuran populasi

p= peluang keberhasilan setiap ulangan

q= 1-p= peluang gagal setiap ulangan

Contoh 5b:

Untuk b (5; 5, 0,20), dimana n= 5 dan n= 0,20, sehingga q= 0,80 maka:

$\mu = 5x0{,}20 = 1{,}00$

$\sigma^2 = 5x0{,}20x0{,}80 = 0{,}80$

$\sigma = \sqrt{0{,}80} = 0{,}8944$

2.3. Distribusi Peluang Poisson

Percobaan Poisson memiliki ciri-ciri berikut:

1. Hasil percobaan pada selang waktu dan tempat tidak tergantung dari hasil percobaan di selang waktu dan tempat yang lain yang terpisah

2. Peluang terjadinya suatu hasil percobaan sebanding dengan panjang selang waktu dan luas tempat percobaan terjadi. Hal ini berlaku hanya untuk selang waktu yang singkat dan luas daerah yang sempit

3. Peluang bahwa lebih dari satu hasil percobaan akan terjadi pada satu selang waktu dan luasan tempat yang sama diabaikan

Definisi Distribusi Peluang Poisson: $Poisson\ (\mu; \mu) = \frac{e^{-\mu}.\mu^{\mu}}{\mu!}$ e= bilangan pokok log natural= 2,71828 x= banyaknya unsur BERHASIL dalam sampel μ= rata-rata keberhasilan

- Tabel Peluang Poisson

  Seperti halnya peluang binomial, soal-soal peluang poisson dapat diselesaikan dengan tabel jumlah peluang poisson (tabel A3). Cara membaca dan menggunakan tabel ini tidak jauh berbeda dengan tabel binomial

  Misal:
  poisson (2; 4,5)
  $$= \sum_{x=0}^{2} p(x; 4{,}5) - \sum_{x=0}^{1} p(x; 4{,}5)$$
  $$= 0{,}1736 - 0{,}0611$$
  $$= 0{,}1125$$

  Poisson (x<3; 4,5)

  $$\sum_{x=0}^{2} p(x; 4{,}5) = 0{,}1736$$

  Poisson (x>2;4,5)

  $$= 1 - \sum_{x=0}^{2} p(x; 4{,}5)$$

$= 1 - 0{,}1736$

$= 0{,}8264$

Contoh 6:

Rata-rata seorang sekretaris baru melakukan 5 kesalahan ketik perhalaman. Berapa peluang bahwa pada halaman berikut ia membuat:

a. Tidak ada kesalahan (x=0)
b. Tidak lebih dari 3 kesalahan ($x \leq 3$)
c. Lebih dari 3 kesalahan ($x > 3$)
d. Paling tidak, ada 3 kesalahan ($x \geq 3$)

Jawab:

$\mu = 5$

a. P (X = 0)
   $= poisson\ (0; 5)$
   $= \dfrac{e^{-5}.5^0}{0!}$
   $= 0{,}0067$ atau lihat tabel A.3
b. $P(X \leq 3) = \sum_{x=0}^{3} p(x; 5) = 0{,}2650$
c. $P(X > 3) = 1 - \sum_{x=0}^{3} p(x; 5)$
   $= 1 - 0{,}2650$
   $= 0{,}7350$
d. Hitung!

Pendekatan Poisson untuk Distribusi Binomial:

- Pendekatan peluang poisson untuk peluang binomial, dilakukan jika n besar ($n > 20$) dan p sangat kecil ($p < 0{,}01$) dengan terlebih dahulu menetapkan p dan kemudian menetapkan $\mu = n \times p$

Contoh 7:

Dari 1000 orang mahasiswa 2 orang mengaku selalu terlambat masuk kuliah setiap hari, jika pada suatu hari terdapat 5000 mahasiswa, berapa peluang ada lebih dari 3 orang yang terlambat?

Jawab:

Kejadian sukses = terlambat masuk kuliah

$p = \frac{2}{1000} = 0{,}002$ n = 5000 x > 3

Jika diselesaikan dengan peluang binomial → b (x>3; 5000, 0,002) tidak ada di tabel, jika menggunakan rumus sangat tidak praktis

p = 0,002 n = 5000 x > 3

μ = n x p = 5000 x 0,002 = 10

diselesaikan dengan peluang poisson →

$= poisson\ (x > 3; 10)$

$= 1 - poisson\ (x \leq 3; 10)$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{3} p\ (x; 10)$$

$= 1 - 0{,}0103$

$= 0{,}9897$

2.4. Distribusi Peluang Hipergeometrik

Peluang binomial → perhatian hanya untuk peluang BERHASIL

Peluang Hipergeometrik

- ➔ Untuk kasus dimana peluang BERHASIL berkaitan dengan peluang GAGAL
- ➔ Ada penyekatan dan pemilihan/ kombinasi obyek (BERHASIL dan GAGAL)

Percobaan hipergeometrik adalah percobaan dengan ciri-ciri sebagai berikut:

1. Contoh acak berukuran n diambil dari populasi berukuran N
2. k dan N diklasifikasikan sebagai BERHASIL, sedangkan N-k diklasifikasikan sebagai GAGAL

Definisi Distribusi Hipergeometrik:

Bila dalam populasi N obyek, k benda termasuk kelas BERHASIL dan N-k (sisanya) termasuk kelas GAGAL maka distribusi hipergeometrik peubah acak X yang menyatakan banyaknya keberhasilan dalam contoh acak berukuran n adalah:

$h(x; N, n, k) = \frac{C_x^k C_{n-x}^{N-k}}{C_n^N}$ untuk x= 0,1,2,3,…, k

Contoh 8:

Jika dari seperangkat kartu bridge diambil 5 kartu secara acak tanpa pemulihan, berupa peluang diperoleh 3 kartu hati?

Jawab: N= 52 n= 5 k= 13 x= 3

$h(3; 52,5,13) = \frac{C_3^{13} C_2^{39}}{C_5^{52}}$ (selesaikan sendiri!)

Rata-rata dan ragam bagi distribusi hipergeometrik h (x;N,n,k) adalah:

$$Rata-rata = \mu = \frac{nk}{N}$$

$$Ragam = \sigma^2 = \frac{N-n}{N-1} x\, n\, x \frac{k}{N} (1 - \frac{k}{N})$$

Perluasan Distribusi Hipergeometrik jika terdapat lebih dari 2 kelas

Distribusi Hipergeometrik dapat diperluas menjadi penyekatan kedalam beberapa kelas:

$$f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k; a_1, a_2, \ldots\ldots., a_k, N, n) = \frac{C_{x_1}^{a_1} x C_{x2}^{a2} x \ldots. x C_{x\,\text{牯}}^{ak}}{C_n^N}$$

Dan perhatikan bahwa:

$$n = \sum_{i=1}^{k} x_1 \qquad dan \qquad N = \sum_{i=1}^{k} a_1$$

N= ukuran populasi atau ruang contoh

n= ukuran contoh acak

k= banyaknya penyekatan atau kelas

xi= banyaknya keberhasilan kelas ke-i dalam contoh

ai= banyaknya keberhasilan kelas ke-i dalam populasi

contoh 9:

Dari 10 pengemudi motor, 3 orang mengemudikan motor merk S, 4 orang menggunakan motor merk Y, dan sisanya menggunakan motor merk H. jika secara acak diambil 5 orang, berapa peluang 1 orang mengemudikan motor merk S, 2 orang merk Y, dan 2 orang merk H?

Jawab:

N= 10	n= 5
a_1= 3	a_2= 4
x_1= 1	x_2= 2
a_3= 3	x_3= 2

$$f(1,2,2;3,4,3,10,5) = \frac{C_1^3 x C_2^4 x C_2^3}{C_5^{10}} = \frac{3x6x3}{252} = \frac{54}{252} = \frac{3}{14} = 0,2142$$

Pendekatan hipergeometrik dapat juga dilakukan untuk menyelesaikan persoalan binomial:

- Binomial → untuk pengambilan contoh dengan pemulihan (pengembalian)
- Hipergeometrik → untuk pengembalian contoh tanpa pemulihan (tanpa pengembalian)

Contoh 10:

Dalam suatu kotak terdapat 5 bola yang terdiri dari 2 bola merah, 2 bola biru, dan 1 bola putih. Tentukan peluang:

a. Terambil 2 bola merah, dari 4 kali pengambilan yang dilakukan secara acak dengan pemulihan?
b. Terambil 2 bola merah, dari 4 kali pengambilan yang dilakukan secara acak tanpa pemulihan?

Soal a)

Diselesaikan dengan distribusi peluang binomial:

p= 2/5= 0,40 n= 4 x=2

b (2;4,0,40)= 0,3456 (lihat tabel A.2 atau gunakan rumus binomial)

soal b)

Diselesaikan dengan distribusi peluang hipergeometrik:

N= 5 n= 4 k= 2 x=2

N-k= 3 n-x= 2

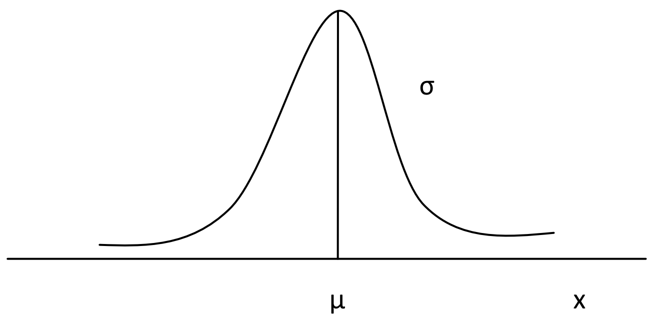
$$h(2;5,4,2) = \frac{C_2^2 x C_2^3}{C_4^5} = \frac{1x3}{5} = \frac{3}{5} = 0,60$$

3. DISTRIBUSI PELUANG KONTINU

3.1. Distribusi Normal

- Nilai peluang peubah acak dalam distribusi peluang normal dinyatakan oleh luas dari daerah dibawah kurva berbentuk genta/ lonceng (bell shape curve)
- Kurva maupun persamaan normal melibatkan nilai x, μ, dan σ
- Keseluruhan kurva akan bernilai 1, ini menggambarkan sifat peluang yang tidak pernah negatif dan maksimal bernilai Satu

Perhatikan gambar dibawah ini:



Definisi Distribusi Peluang Normal:

$$n(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

$untuk\ nilai\ x = -\infty < x < \infty \quad e = 2{,}71828.. \quad \pi = 3{,}14159 \ldots$

π= rata-rata populasi

σ= simpangan baku populasi

σ= ragam populasi

untuk memudahkan penyelesaian soal-soal peluang normal, lihat tabel A.4. perhatikan tabel berikut:

1. Nilai yang dicantumkan adalah nilai z

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

2. P (Z < z) = luas daerah yang diarsir

Dalam soal-soal peluang normal tanda =, ≤, dan ≥ diabaikan, jadi hanya ada tanda < dan >

Contoh cara membaca tabel A.4:

a. P (0 < Z < 1,25)
   = P (Z < 1,25) – 0,5
   = 0,8944 – 0,5
   = 0,3944

b. P (Z > 1,25)
   = 1 – P (Z < 1,25)
   = 1- 0,8944
   = 0,1056

c. P (Z < 1,25)
   = 0,8944

d. $P(-1{,}25 < Z < 0)$
   $= P(0 < Z < 1{,}25)$
   $= 0{,}3944$

e. $P(Z > -1{,}25)$
   $= P(Z - 1{,}25)$
   $= 0{,}8944$

f. $P(Z < -1)$
   $= 1 - P(Z < 1{,}25)$
   $= 1- 0{,}8944$
   $= 0{,} 1056$

g. $P(-1{,}25 < Z < 1{,}25)$
   $= P(Z < 1{,}25) - P(Z < -1{,}25)$
   $= 0{,}8944 - 0{,}1056$
   $0{,}7888$

h. $P(-1{,}30 < Z < -1{,}25)$
   $= P(Z < -1{,}25) - P(Z < -1{,}30)$
   $= 0{,}1056 - 0{,}0968$
   $= 0{,}0088$

i. $P(1{,}25 < Z < 1{,}35)$
   $= P(Z < 1{,}35) - P(Z < 1{,}25)$
   $= 0{,}9115 - 0{,}8944$
   $= 0{,}0171$

Contoh 11:

Rata-rata upah seorang buruh = $ 8.00 perjam dengan simpangan baku= $ 0,60, jika terdapat 1000 buruh, hitunglah:

a. Banyak buruh yang menerima upah/ jam kurang dari $ 7,80
b. Banyak buruh yang menerima upah/ jam lebih dari $ 8,30
c. Banyak buruh yang menerima upah/ jam antara $ 7,80 sampai $ 8,30
   $\mu = 8{,}00$ $\sigma = 0{,}60$

a. X < 7,80

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{7,80 - 8,00}{0,60} = -0,33$$

P (X < 7,80) = P (Z < -0,33) = 0,3707 (gambarkan!).

banyak buruh yang menerima upah/ jam kurang dari $ 7,80:

= 0,3707 x 1000

= 370,7 = 371 orang

b. X > 8,30

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{8,30 - 8,00}{0,60} = -0,50$$

P (X > 8,30) = P (Z > 0,50)
= 1 – P (Z < 0,50)
= 1- 0,6915
= 0,3085 (gambarkan!)

banyak buruh yang menerima upah/ jam lebih dari $ 8,30:
= 0,3085 x 1000
= 308,5 = 309 orang

c. 7,80 < X < 8,30

z_1= -0,33 z_2= 0,50
P (7,80 < X < 8,30)
= P (-0,33 < Z < 0,50)
= P (Z < 0,50) – P (Z < -0,33)
= 0,6915 – 0,3707
= 0,3208 (gambarkan!)

Banyak buruh yang menerima upah/ jam dari $ 7,80 sampai $ 8,30
= 0,3208 x 1000
= 320,8 = 321 orang

- Pendekatan untuk peluang binomial p bernilai sangat kecil dan n relatif besar dan
  a. Jika rata-rata (μ) ≤ 20, maka lakukan pendekatan dengan distribusi Poisson dengan μ = n x p
  b. Jika rata-rata (μ) > 20, maka lakukan pendekatan dengan distribusi Normal dengan:
     $\mu = n\ x\ p$
     $\sigma^2 = n\ x\ p\ x\ q$
     $\sigma = \sqrt{n\ x\ p\ x\ q}$

Contoh 12:

Dari 200 soal pilihan ganda, yang jawabannya terdiri dari lima pilihan (a,b,c,d,dan e). berapa peluang anda akan menjawab benar lebih dari 50 soal?

N= 200 p= 1/5=0,20 q= 1-0,20= 0,80

Jika dikerjakan dengan Poisson

P (X > 50; p = 0,20) μ = n x p = 200 x 0,20 = 40

Poisson (X > 50; μ = 40), μ = 40 dalam tabel poisson tidak ada dan menggunakan rumus/ dihitung terlalu rumit!

➔ P (X = 51; 40) +……+ P (X = 200; 40)

Kerjakan dengan Normal

$P(X > 50; p = 0{,}20) \quad \mu = n\ x\ p = 200\ x\ 0{,}20 = 40$

$\sigma^2 = n\ x\ p\ x\ q = 200\ x\ 0{,}20\ x\ 0{,}80 = 32$

$\sigma = \sqrt{n\ x\ p\ x\ q} = \sqrt{32} = 5{,}6568$

$P(X > 50; p = 0{,}20) \rightarrow P\ (Z > ?\ )$

$$z = \frac{50{,}5 - 40}{\sqrt{32}} = 1{,}856\ \approx 1{,}86$$

$P(Z > 1{,}86) = 1 - P(Z -< 1{,}86) = 1 - 0{,}9686 = 0{,}0314 = 3{,}14\%$

DAFTAR PUSTAKA

Walpole, R.E. 1992. Pengantar Statistika. Penerbit Gramedia

I Nyoman Susila dan Elle Gunawan, 1994. Statistika. Penerbit Erlangga

Imam Gunawan, 2016. Pengantar Statistika Inferensial. Penerbit Raja Granfindo Persada

Sarwoko, 2007. Statistika inferensi untuk Ekonomi dan Bisnis. Penerbit Andi