
MODUL 4 : METODA “*Slope Deflection*”**4.1. Judul : Metoda “*Slope Deflection*”****Tujuan Pembelajaran Umum**

Setelah membaca bagian ini mahasiswa akan dapat memahami apakah metoda “*Slope Deflection*” dan bagaimana metoda “*Slope Deflection*” dipakai untuk menyelesaikan struktur statis tidak tertentu.

Tujuan Pembelajaran Khusus

Mahasiswa selain dapat memahami metoda “*Slope Deflection*” juga dapat menyelesaikan suatu struktur statis tidak tertentu yaitu menghitung semua gaya luar (reaksi perletakan) dan gaya-gaya dalam (gaya normal, gaya lintang, momen batang) dari struktur tersebut dengan menggunakan metoda “*Slope Deflection*”.

4.1.1. Pendahuluan

Berbeda dengan metoda-metoda yang telah dibahas sebelumnya, yaitu metoda “*Consistent Deformation*” yang memakai gaya luar (reaksi perletakan) sebagai variabel dan metoda “*Persamaan Tiga Momen*” yang memakai gaya dalam (momen batang) sebagai variabel, untuk metoda “*Slope Deflection*” ini rotasi batang dipakai sebagai variabel. Maka dari itu untuk metoda “*Consistent Deformation*” dan metoda “*Persamaan Tiga Momen*” yang variabelnya berupa gaya luar ataupun gaya dalam dikategorikan sebagai “*Force Method*” sedangkan metoda “*Slope Deflection*” yang memakai rotasi batang sebagai variabel dikategorikan sebagai “*Flexibility Method*”. Dengan ketentuan bahwa pada batang-batang yang bertemu pada suatu titik simpul (joint) yang disambung secara kaku mempunyai rotasi yang sama, besar maupun arahnya, maka pada batang-batang yang bertemu pada titik simpul tersebut mempunyai rotasi yang sama, atau boleh dikatakan sama dengan rotasi titik simpulnya. Sehingga dapat dikatakan jumlah variabel yang ada sama dengan jumlah titik simpul (joint) struktur tersebut.

Besarnya variabel-variabel tadi akan dihitung dengan menyusun persamaan-persamaan sejumlah variabel yang ada dengan ketentuan bahwa momen batang-batang yang bertemu pada satu titik simpul haruslah dalam keadaan seimbang atau dapat dikatakan jumlah momen-momen batang yang bertemu pada satu titik simpul sama dengan nol. Disini diperlukan perumusan dari masing-masing momen batang sebelum menyusun persamaan-persamaan yang dibutuhkan untuk menghitung variabel-variabel itu. Rumus-rumus momen batang tersebut mengandung variabel-variabel yang ada yaitu rotasi titik simpul.

Dengan persamaan-persamaan yang disusun, besarnya variabel dapat dihitung. Setelah besarnya variabel didapat, dimasukkan kedalam rumus-rumus momen batang, maka besarnya momen batang-batang tersebut dapat dihitung. Demikianlah konsep dari metoda “*Slope Deflection*” untuk menyelesaikan struktur statis tidak tertentu.

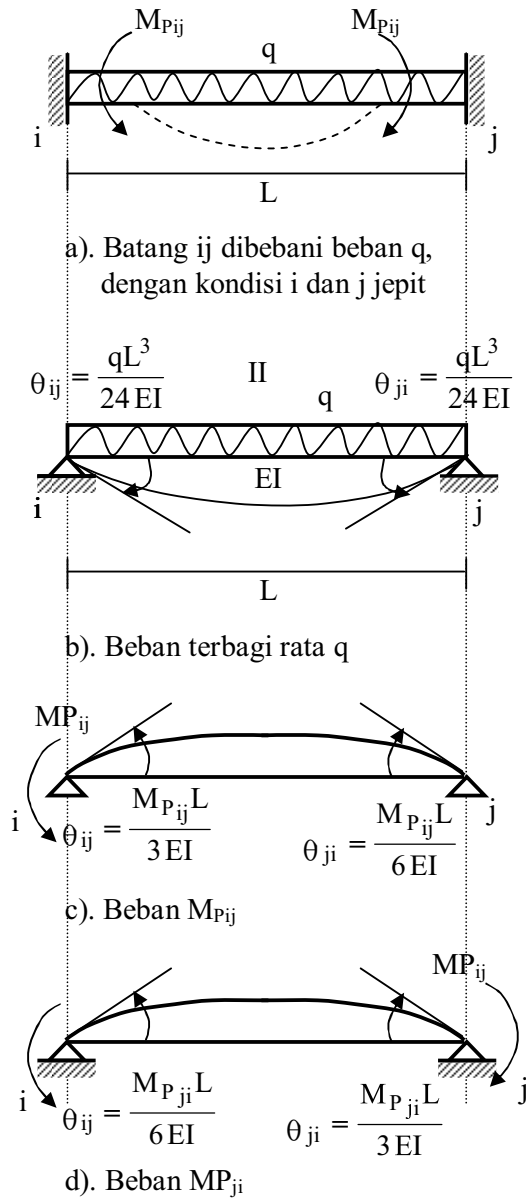
4.1.2. Perumusan Momen Batang

Momen batang dapat ditimbulkan dengan adanya beban luar, rotasi titik simpul ujung-ujung batang dan juga akibat perpindahan relatif antara titik simpul ujung batang atau yang biasa disebut dengan pergoyangan. Seberapakah besarnya momen akibat masing-masing penyebab tadi, dapat diturunkan sebagai berikut :

A. Batang dengan kedua ujungnya dianggap jepit.

1. Akibat beban luar

Momen batang akibat beban luar ini seterusnya disebut sebagai Momen Primair (M_p), yaitu momen akibat beban luar yang mengembalikan rotasi nol ($\theta = 0$) pada ujung batang jepit.



Gambar 4.1.

Dari ketiga pembebanan tadi, rotasi di i dan j haruslah sama dengan nol (karena i dan j adalah jepit).

$$\theta_{ij} = \frac{qL^3}{24EI} - \frac{M_{Pij}L}{3EI} - \frac{M_{Pji}L}{6EI} = 0 \quad (1)$$

$$\theta_{ji} = \frac{qL^3}{24EI} - \frac{M_{Pij}L}{6EI} - \frac{M_{Pji}L}{3EI} = 0 \quad (2)$$

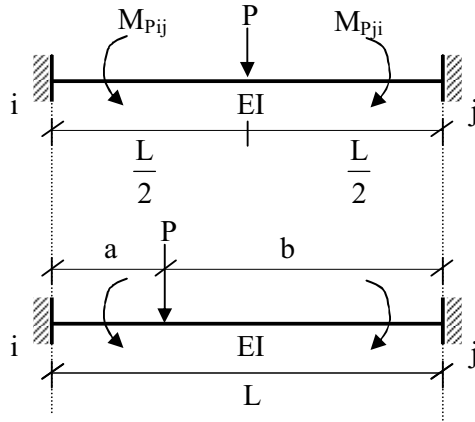
Batang i-j dengan beban terbagi rata q akibat beban q akan terjadi lendutan, tetapi karena i dan j jepit, maka akan terjadi momen di i dan j untuk mengembalikan rotasi di jepit sama dengan nol, yaitu $\theta_{ij} = 0$ dan $\theta_{ji} = 0$.

Momen itulah yang disebut momen primair (M_P), M_{Pij} di ujung i dan M_{Pji} di ujung batang j. Berapakah besarnya M_{Pij} dan M_{Pji} bisa kita cari sebagai berikut. Kondisi batang i-j yang dibebani beban terbagi rata q dan terjadi M_{Pij} dan M_{Pji} karena ujung-ujung i dan j jepit, dapat dijabarkan sebagai balok dengan ujung-ujung sendi dibebani beban terbagi rata q , (Gambar b), beban momen M_{Pij} (Gambar c) dan beban momen M_{Pji} (Gambar d).

Dari kedua persamaan itu didapatkan besarnya M_{Pij} dan M_{Pji} yaitu :

$$M_{Pij} = M_{Pji} = \frac{1}{12} qL^2$$

Dengan cara yang sama dapat diturunkan rumus besarnya momen pïmainir dari beban terpusat sebagai berikut :

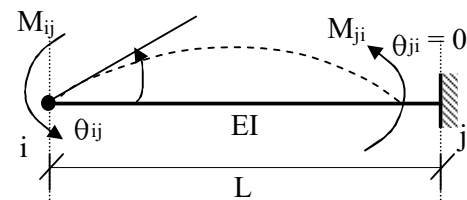


- Beban terpusat P ditengah bentang

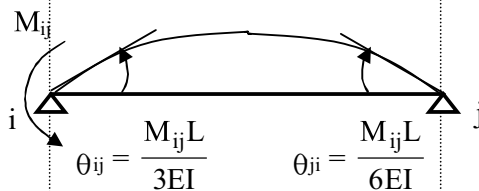
$$M_{Pij} = M_{Pji} = \frac{1}{8} PL$$

- $M_{Pij} = \frac{Pab^2}{L^2}$ $M_{Pji} = \frac{Pa^2b}{L^2}$

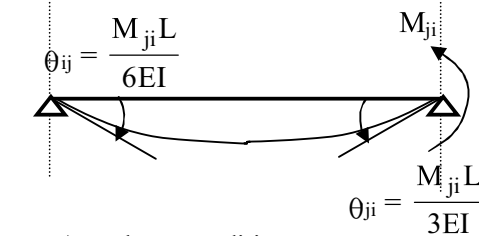
2. Akibat rotasi di i (θ_{ij})



a). Batang ij dengan rotasi θ_{ij}



b). Beban M_{ij} di i



c). Beban M_{ji} di j

Gambar 4.2

Akibat rotasi θ_{ij} , di ujung i terjadi momen M_{ij} , dan untuk mempertahankan rotasi di j sama dengan nol ($\theta_{ji} = 0$) akan terjadi momen M_{ji} .

Kondisi pada Gambar (a) dapat dijabarkan sebagai balok dengan ujung-ujung sendi dengan beban M_{ij} (Gambar b) dan beban M_{ji} (Gambar c).

Dari kedua pembebanan tersebut, rotasi di j harus sama dengan nol.

$$\theta_{ji} = \frac{M_{ij}L}{6EI} - \frac{M_{ji}L}{3EI} = 0$$

$$M_{ji} = \frac{1}{2} M_{ij}$$

Disini kita dapatkan bahwa apabila di i ada momen sebesar M_{ij} , untuk mempertahankan rotasi di j sama dengan nol (0), maka momen tadi diinduksikan ke j dengan faktor induksi setengah (0,5).

Besarnya rotasi di i : $\theta_{ij} = \frac{M_{ij}L}{3EI} - \frac{M_{ji}L}{6EI}$

Dengan memasukkan $M_{ji} = \frac{1}{2} M_{ij}$, didapat

$$\theta_{ij} = \frac{M_{ij}L}{4EI} \rightarrow M_{ij} = \frac{4EI}{L} \theta_{ij} \tag{4}$$

Sehingga didapat besarnya momen akibat θ_{ij} :

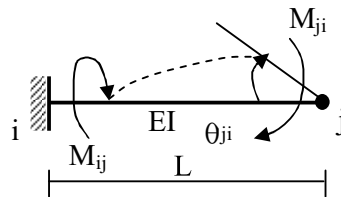
$$M_{ij} = \frac{4EI}{L} \theta_{ij} \quad \text{dan} \quad M_{ji} = \frac{2EI}{L} \theta_{ij}$$

Kita buat notasi baru yaitu kekakuan sebuah batang (K) dengan definisi :

Kekakuan batang (K) adalah besarnya momen untuk memutar sudut sebesar satu satuan sudut ($\theta = 1$ rad), bila ujung batang yang lain berupa jepit.

Untuk $\theta_{ij} = 1$ rad, maka $K_{ij} = \frac{4EI}{L}$

3). Akibat rotasi di j (θ_{ji})

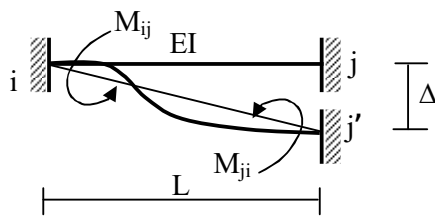


Gambar 4.3. akibat M_{ji}

Dengan cara sama seperti penurunan rumus akibat θ_{ij} , maka akibat rotasi θ_{ji} , maka akibat rotasi θ_{ji} didapat :

$$M_{ji} = \frac{4EI}{L} \theta_{ji} ; M_{ij} = \frac{2EI}{L} \theta_{ji}$$

4). Akibat pergoyangan (Δ)



Gambar 4.4. akibat Δ

Akibat pergoyangan (perpindahan relatif ujung-ujung batang) sebesar Δ , maka akan terjadi rotasi θ_{ij} dan θ_{ji}

$$\theta_{ij} = \theta_{ji} = \frac{\Delta}{L}$$

Karena ujung-ujung i dan j jepit maka akan timbul momen M_{ij} dan M_{ji} untuk mengembalikan rotasi yang terjadi akibat pergoyangan. Seolah-olah ujung i dan j berotasi $\theta_{ij} = \theta_{ji} = \frac{\Delta}{L}$, sehingga besarnya momen :

$$M_{ij} = \frac{4EI}{L} \theta_{ij} + \frac{2EI}{L} \cdot \theta_{ji} = \frac{6EI}{L^2} \cdot \Delta$$

$$M_{ji} = \frac{4EI}{L} \theta_{ji} + \frac{2EI}{L} \cdot \theta_{ij} = \frac{6EI}{L^2} \cdot \Delta$$

Dari keempat hal yang menimbulkan momen tadi, dapat ditulis rumus umum momen batang sebagai berikut :

Untuk i dan j jepit :

$$M_{ij} = M_{Pij} + \frac{4EI}{L} \theta_{ij} + \frac{2EI}{L} \theta_{ji} + \frac{6EI}{L^2} \Delta \quad (4.1 - 1a)$$

$$M_{Pji} = M_{Pji} + \frac{4EI}{L} \theta_{ji} + \frac{2EI}{L} \theta_{ij} + \frac{6EI}{L^2} \Delta \quad (4.1 - 1b)$$

Dengan $K_{ij} = \frac{4EI}{L}$

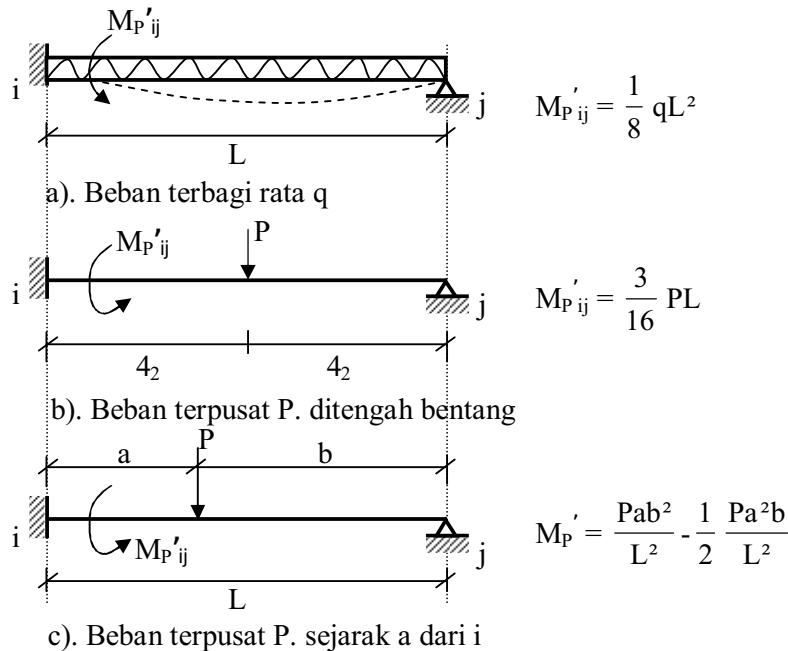
$$M_{ij} = M_{Pij} + K (\theta_{ij} + \frac{1}{2} \theta_{ji} + 1,5 \frac{\Delta}{L}) \quad (4.1 - 2a)$$

$$M_{ji} = M_{Pji} + K (\theta_{ji} + \frac{1}{2} \theta_{ij} + 1,5 \frac{\Delta}{L}) \quad (4.1 - 2b)$$

B. Batang dengan salah satu ujungnya sendi / rol

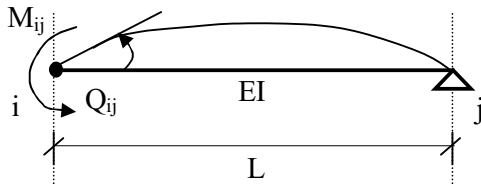
1. Akibat beban luar

Dengan cara yang sama seperti pada balok dengan i dan j jepit, didapat besarnya momen primair (akibat beban luar) sebagai berikut :



Gambar 4.5

2). Akibat rotasi di i (θ_{ij})



Gambar 4.6. akibat M_{ij}

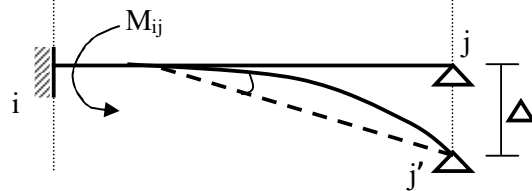
$$\theta_{ij} = \frac{M_{ij} L}{3EI}$$

$$M_{ij} = \frac{3EI}{L} \theta_{ij}$$

Kekakuan batang modifikasi (K'), besarnya momen untuk memutar rotasi sebesar satu satuan sudut ($\theta = 1$ rad) bila ujung yang lain sendi.

$$\theta_{ij} = 1 \text{ rad} \Rightarrow K'_{ij} = \frac{3EI}{L}$$

3). Akibat pergoyangan (Δ)



Gambar 4.7. akibat Δ

Akibat pergoyangan Δ , i dan j

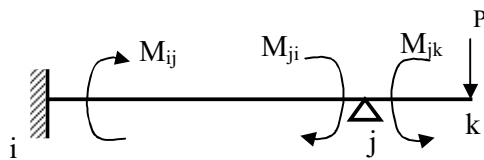
berotasi sebesar $\frac{\Delta}{L}$

$$\theta_{ij} = \theta_{ji} = \frac{\Delta}{L}$$

M_{ij} mengembalikan rotasi di i sama dengan nol ($\theta_{ij} = 0$) seolah-olah di i

berotasi $\theta_{ij} = \frac{\Delta}{L}$, sehingga timbul momen : $M_{ij} = \frac{3EI}{L} \theta_{ij} = \frac{3EI}{L^2} \cdot \Delta$

4). Akibat momen kantilever, kalau di ujung perletakan sendi ada kantilever : (jk- batang kantilever)



Gambar 4.8. akibat momen kantilever

Momen kantilever M_{jk} .

$$\sum M_j = 0 \Rightarrow M_{ji} = -M_{jk}$$

akibat M_{ji} , untuk mempertahankan $\theta_{ij} = 0$, akan timbul M_{ij} .

$$M_{ij} = \frac{1}{2} M_{ji} = -\frac{1}{2} M_{jk}$$

Dari keempat hal yang menimbulkan momen batang diatas dapat dituliskan secara umum momen batang sebagai berikut :

Untuk ujung j sendi / rol :

$$M_{ij} = M_{P'ij} + \frac{3EI}{L} \theta_{ij} + \frac{3EI\Delta}{L^2} - \frac{1}{2} M_{jk} \quad (4.1 - 3)$$



Dengan $K' = \frac{3EI}{L}$, rumus tersebut diatas dapat ditulis

$$M_{ij} = M_{P'ij} + K' \left(\theta_{ij} + \frac{\Delta}{L} \right) - \frac{1}{2} M_{jk} \quad (4.1 - 4)$$

Jadi kita mempunyai dua rumus momen batang, pertama dengan ujung-ujung jepit-jepit, kedua dengan ujung-ujung jepit sendi. Yang dikatakan ujung jepit bila ujung batang betul-betul perletakan jepit atau sebuah titik simpul yang merupakan pertemuan batang dengan batang (tidak termasuk katilever). Sedangkan yang dikatakan ujung batang sendi yang betul-betul perletakan sendi, bukan berupa titik-titik simpul.

Kalau kita perhatikan pada perumusan batang dengan jepit-jepit, rumus (4.1-1 dan 4.1-2) disana ada dua variabel rotasi yaitu θ_{ij} dan θ_{ji} , sedangkan untuk batang dengan ujung jepit-send, perumusannya hanya mengandung satu variabel rotasi yaitu θ_{ij} , rotasi pada perletakan sendi (θ_{ji}) tidak pernah muncul dalam perumusan.

Untuk menunjukkan arah momen batang dan rotasi, dalam perumusan momen batang perlu diadakan perjanjian tanda sebagai berikut :

Momen batang positif (+) bila arah putarannya searah jarum jam () , dan negatif (-), bila arah putarannya berlawanan arah jarum jam () .

Demikian juga untuk arah rotasi, kita beri tanda seperti pada momen batang. Untuk akibat beban luar (M_P) tanda momen bisa positif (+) atau negatif (-) tergantung beban yang bekerja, demikian juga akibat pergoyangan bisa positif (+) atau negatif (-) tergantung arah pergoyangannya. Untuk rotasi, karena kita tidak tahu arah sebenarnya (sebagai variabel) selalu kita anggap positif (+).

4.1.3. Langkah-langkah yang harus dikerjakan pada metoda “*Slope Deflection*”

Untuk menyelesaikan perhitungan struktur statis tidak tertentu dengan metoda “*Slope Deflection*” urutan langkah-langkah yang harus dikerjakan adalah sebagai berikut :

- Tentukan derajat kebebasan dalam pergoyangan struktur statis tidak tertentu tersebut, dengan rumus :

$$n = 2j - (m + 2f + 2h + r)$$

dimana :

n = jumlah derajat kebebasan

j = “joint”, jumlah titik simpul termasuk perletakan.

m = “member”, jumlah batang, yang dihitung sebagai member adalah batang yang dibatasi oleh dua joint.

f = “fixed”, jumlah perletakan jepit.


h = “hinged”, jumlah perletakan sendi.

r = “rool”, jumlah perletakan rol.

Bila $n \leq 0$ □ tidak ada pergoyangan.

$n > 0$ □ ada pergoyangan

- Kalau ada pergoyangan, gambarkan bentuk pergoyangan ada tentukan arah momen akibat pergoyangan, untuk menentukan tanda positif (+) ataukah negatif (-) momen akibat pergoyangan tersebut (untuk menggambar pergoyangan ketentuan yang harus dianut seperti pada metoda “Persamaan Tiga Momen”).
- Tentukan jumlah variabel yang ada. Variabel yang dipakai pada metoda ini adalah rotasi (θ) titik simpul, dan delta (Δ) kalau ada pergoyangan.
- Tuliskan rumus momen batang untuk semua batang yang ada dengan rumus (4.1.1 s/d 4.1.4.) dimana akan mengandung variabel-variabel (θ dan Δ) untuk masing-masing rumus momen batang tersebut.
- Untuk menghitung variabel-variabel tersebut perlu disusun persamaan-persamaan sejumlah variabel yang ada. Persamaan-persamaan itu akan disusun dari :

- Jumlah momen batang-batang yang bertemu pada satu titik simpul sama dengan nol.
- Kalau ada variabel Δ , perlu ditambah dengan persamaan keseimbangan struktur. Seperti juga pada metoda “Persamaan Tiga Momen”, dalam menyusun persamaan keseimbangan struktur pada dasarnya membuat perhitungan “free body diagram” sehingga mendapatkan persamaan yang menghubungkan satu variabel dengan variabel yang lain. Pada penggambaran arah momen, momen yang belum tahu besarnya (masih dalam perumusan) digambarkan dengan arah positif (+) yaitu searah jarum jam ()
- Dengan persamaan-persamaan yang disusun, dapat dihitung besarnya variabel-variabelnya.
- Setelah variabel-variabel diketahui nilainya, dimasukkan kedalam rumus momen-momen batang, sehingga mendapatkan harga nominal dari momen-momen batang tersebut.

4.2. Penyelesaian struktur statis tidak tertentu dengan metoda “*Slope Deflection*”

Dari pembahasan sebelumnya kita mengetahui bahwa konsep dari metoda “*Slope Deflection*” adalah memakai rotasi titik simpul (θ) sebagai variabel dan juga pergoyangan (Δ) kalau struktur kita dapat bergoyang. Variabel-variabel tadi akan dipakai didalam perumusan momen-momen batang karena rumus momen batang mengandung unsur-unsur akibat beban rotasi titik simpul (θ) dan defleksi relatif (pergoyangan - Δ). Untuk menghitung besarnya variabel-variabel tersebut, disusun persamaan-persamaan sejumlah variabel yang ada dari persyaratan keseimbangan titik simpul dan kalau ada variabel pergoyangan (Δ) ditambah dengan persamaan keseimbangan struktur. Setelah variabel-variabel tersebut dapat dihitung, kita masukkan kedalam rumus momen batang kita dapatkan besarnya momen-momen batang tersebut. Karena metoda ini memakai variabel rotasi dan pergoyangan maka metoda ini disebut metoda “*Slope Deflection*”.